УРМАТЫ

Тихонов, Самарский "У.М.Ф."

$u(x,y)$

(1) Ур-е 2ого порядка: $F(x,y,u(x,y),u'_x,u'_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0$

(2) $a_{11}(x,y)\cdot u_{xx}+2a_{12}(x,y)\cdot u_{xy}+a_{22}(x,y)\cdot u_{yy}+F_1(x,y,u,u_x,u_y)=0$

↑ линейное отн-но старших произв.

Просто линейное:

(3) $a_{11}(x,y)\cdot u_{xx}+2a_{12}(x,y)\cdot u_{xy}+a_{22}(x,y)\cdot u_{yy}+b_1(x,y)u_x+$
$+b_2(x,y)\cdot u_y+c(x,y)\cdot u=f(x,y)$

Опр. - ур-е (2) в точке (x_0,y_0) наз-ся

1) уравн. гиперболического типа, если

$$a_{12}^2(x_0,y_0)-a_{11}(x_0,y_0)\cdot a_{22}(x_0,y_0)>0$$

2) уравн. эллиптического типа, если

$$a_{12}^2(x_0,y_0)-a_{11}(x_0,y_0)\cdot a_{22}(x_0,y_0)<0$$

3) уравн. параболического типа, если

— " — $=0$

Вывод уравн-я распространения тепла в пространстве

Есть $u(x,y,z,t)$

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

• теор. Остр.-Гаусса: $\vec{A}(x,y,z,t) = \{P(); Q; R\}$

$$\iint_{\Sigma} (\vec{A}, \vec{n})\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A}\, d\tau$$

где $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

⊕ $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$

⊕ $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, d\tau = f(c)\cdot V_{\Omega}$ ← объем области; $c \in \Omega$

Есть точка пр-ва $u(x,y,z,t)$ – температура

Закон Фурье:

$\vec{W}(x,y,z,t)$ – вектор теплового потока

$$\vec{W}(x,y,z,t) = -k(x,y,z)\cdot \operatorname{grad} u(x,y,z,t) = \left\{ k\cdot\frac{\partial u}{\partial x}; k\cdot\frac{\partial u}{\partial y}; k\cdot\frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

$k(x,y,z)$ – коэфф. теплопроводности

Теплоемкость: $c(x,y,z)$ – удельная теплоемкость

$\rho(x,y,z)$ – плотность

$$Q(t) = \iiint_{\Omega} c()\cdot\rho()\cdot u(x,y,z,t)\, d\tau$$

$$\iiint\limits_{\Omega} c(x,y,z)\,\rho(x,y,z)\left[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)\right]d\tau =$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\iint\limits_{\Sigma}(\vec{W}\,\vec{n})\,d\sigma\right)dt+\int\limits_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_{\Omega}F(x,y,z,t)\,d\tau\,dt$$

↑ закон сохранения тепла

Пусть у функции $u(..)$ есть $u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_t$.

$$\iiint\limits_{\Omega} c(x,y,z)\,\rho(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t_3)(t_2-t_1)\,d\tau =$$

$t_3, t_4, t_5 \in [t_1,t_2]$

$$=-\iint\limits_{\Sigma}(\vec{W}\,\vec{n})\,d\sigma\Big|_{t=t_4}(t_2-t_1)+$$

$$+\iiint\limits_{\Omega}F(x,y,z,t_5)\,d\tau\,(t_2-t_1)$$

=> Теорема о среднем =>

$$c(M_1)\,\rho(M_1)\frac{\partial u}{\partial t}(M_1,t_3)\cdot V_\Omega=-\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\vec{W}\,d\tau\Big|_{t=t_4}+$$

$$+F(M_2,t_5)\,V_\Omega$$

$$\cancel{\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\vec{W}\,d\tau\Big|_{t=t_4}=-\operatorname{div}\vec{W}\Big|_{\substack{M=M_3\\ t=t_4}}}$$

$$c(M_1)\,\rho(M_1)\frac{\partial u}{\partial t}(M_1,t_3)=-\operatorname{div}\vec{W}\Big|_{\substack{M=M_3\\ t=t_4}}+F(M_2,t_5)$$

$$\vec{W}=-k(M)\operatorname{grad}u(M,t)=\left\{-k\frac{\partial u}{\partial x},-k\frac{\partial u}{\partial y},k\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

получили

$$c(M)\rho(M)\frac{\partial u}{\partial t}(M,t) = \operatorname{div}(K(M)\,\mathrm{grad}\,u(M,t)) + F(M,t)$$

— ур-е, описывающее распр-е тепла в среде

$$\operatorname{div}(K(M)\,\mathrm{grad}\,u) = K(M)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] + \frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} = K(M)\underset{\text{оп-р Лапласа}}{\Delta u} + (\mathrm{grad}\,K, \mathrm{grad}\,u)$$

Если c, ρ, K — постоянные, то

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t) = a^2 \Delta u + f(x,y,z,t)$$

Уравнение диффузии

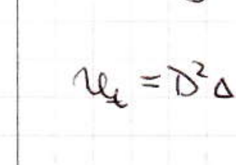
$u(x,y,z,t)$ — концентрация вещества в точке (x,y,z) во время t

$u_t = D^2 \Delta u + f(M,t)$, где D - коэфф. диффузии

Постановка задач для одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad \begin{matrix} 0 < t \le T \\ 0 < x < l \end{matrix}$$

начальный момент считаем $t=0$



Начальное условие: $u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \le x \le l$

copybook

Краевые (граничные) условия:

1) первое краевое условие:

$$u(0,t)=\mu(t) \quad 0\le t\le T$$

2) второе кр. условие

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\nu(t), \quad 0\le t\le T$$

3) третье: $u(0,t)+\lambda\cdot u_x(0,t)=\theta(t), \; 0\le t\le T$

какой-то коэфф.

- Первая краевая задача: найти $u(x,t)$.

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t) \quad \begin{matrix} 0<x<l \\ 0<t\le T \end{matrix}$$

(..) были другие

- Вторая кр. задача:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}+f(x,t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\nu_1(t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=\nu_2(t) \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\le x\le l \end{cases} \quad 0\le t\le T$$

- Задачи на полупрямой:

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t) \quad \begin{matrix} x>0 \\ 0<t\le T \end{matrix}$$

$$u(0,t)=\mu(t), \quad 0\le t\le T$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad x>0$$

- Задачи на прямой:

Задача Коши:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty$$

Первая краевая задача для ур-й теплопроводности

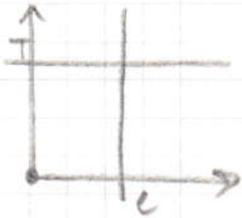
(1) $u_t = a^2 u_{xx} \qquad 0 < x < l, \quad 0 < t < T$

(2) $u(0,t) = \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T$

(3) $u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T$

(4) $u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$

$$Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l, \ 0 < t \leq T\}$$



Опр. - функция $u(x,t)$ наз-ся классическим решением задачи (1)-(4), если
1) $u \in C(\overline{Q}_T)$
2) $u \in C^{2,1}(Q)$
3) $u(x,t)$ удовл. (1)-(4)

$$v(x,t) = \begin{cases} \text{const в } Q \\ v(0,t) = \mu_1(t) \\ v(l,t) = \mu_2(t) \\ v(x \ldots \end{cases}$$

Метод решения такой задачи:
Метод разделения переменных (метод Фурье)

Ищем решение (1) $v(x,t) = X(x), T(t)$

$$X(x)\cdot T'(t) = a^2 X''(x) T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$ – какая-то const
(т.к. равны ф-ции двух различ. переменных)

$$\Rightarrow X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad 0<x<l \leftarrow \boxed{\text{Зад. Шт.-Л.}}$$
$$X(0)=0 \quad X(l)=0$$

$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ $n=1,2,3\ldots$ собств. знач.

$X_n(x) = \tilde{c}_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$, $n=1,2,3$

$$T_n'(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = 0 \quad 0\le t\le T$$
$$T_n(t) = \tilde{\tilde{c}}_n \cdot \exp\left\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right\}$$

$v_n(x,t) = X_n(x)\cdot T_n(t)$ удовл. (1)-(3)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\tilde{c}_n \cdot \tilde{\tilde{c}}_n}_{\triangleq c_n} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cdot$$
$$\cdot \exp\left\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right\}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = \varphi(x)$$

$$\int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)dx = \begin{cases} \frac{l}{2}, & n=m \\ 0, & n\ne m \end{cases}$$ т.к. пр-синусы – ортогон. система

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^l \underbrace{\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)dx}_{=0,\text{ если } n\ne m} = \int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)dx$$

$$c_m \frac{l}{2} = \int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)dx$$

Получим $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds\cdot$ (5)

$\cdot\, e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$ (5)

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{2}s\right)ds$$

Если $\varphi \in C[0,l]$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2$ сходится

$$\hat{\varphi}_n = \int_0^l \varphi(s)\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 \text{ сх-ся}$$

Теорема существования: пусть $\varphi \in C^1[0,l]$ и $\varphi(0)=\varphi(l)=0$. Тогда ф-ция $u(x,t)$, определяемая формулой (5), является классич. решением задачи (1)-(4) в Q_T, то есть $u \in C(\overline{Q_T})$, $u \in C^{2,1}(Q_T)$ и $u(x,t)$ ~~явл.~~ удовл. (1)-(4).

Док-во: рассм. $\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds$ ‡

$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|$ сх-ся

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)\cdot\varphi(s)ds = \frac{2}{l}\left(-\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}s\right)\varphi(s)\Big|_0^l + \frac{2}{\pi n}\int_0^l \varphi'(s)\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\hat{\varphi}_n$$

$$\hat{\varphi}_n = \int_0^l \varphi'(s)\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\hat{\varphi}_n^2 \text{ сх-ся}$$

$|\varphi_n| = \left|\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\hat{\varphi}_n\right)\right| \leq$ Из $\boxed{ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)}$

$\leq \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2} + \hat{\varphi}_n^2\right)$.

Признак Вейерштрасса: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t)$ т.ч. $|v_n(x,t)| \leq \alpha_n$ и в Q_T $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ сх-ся, то и наш ряд сх-ся.

① $u \in C(\overline{Q_T})$

Докажем равном. сх-сть (проспушала!)

8

copybook

② $u \in C^{2,1}[Q_T]$

Докажем, что $u \in C^{2,1}\{[0,l]\times[t_0,T]\}$, где $0<t_0<T$ – этого будет достаточно.

Оценим $|v_n(x,t)|$ в $Q_{t_0 T}$:

$$|v_n(x,t)| \le |\varphi_n| e^{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2 t_0} \cdot 1$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} = \varphi_n\left(-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) e^{-a^2(\frac{n\pi}{l})^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)x$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial v_n}{\partial t}\right| \le |\varphi_n| a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 e^{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2 t_0} \cdot 1 \triangleq d_n$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ – сх-ся

$\Rightarrow$ доказали ②.

Теперь нужно док-ть, что выполнено (1), (2), (3), (4).

$u_t = a^2 u_{xx} \Rightarrow$ (1)⊕.
(2)(3)⊕

$u(x,0)=\varphi(x)$

$u(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$ сх-ся равномерно

...

#

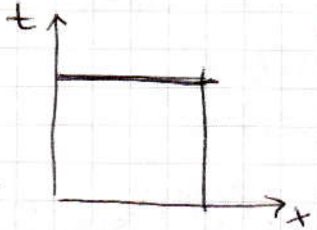
Следствие: если $\varphi \in C^1[0,l]$, $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, то $u(x,t)$ опред-ет (5), т.ч. $u \in C^{\infty}(Q_T)$

Док-во: $\dfrac{\partial^m u}{\partial x^p \partial t^q}$ – надо док-ть

$$\left|\frac{\partial^m v_n(x,t)}{\partial x^p \partial t^q}\right| \le |\varphi_n| \left(a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right)^p e^{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2 t_0} \cdot 1 \cdot \left(\frac{\pi n}{l}\right)^q$$

$\forall (x,t) \in \bar{Q}_{t_0,T}$ – числ. ряд

Принцип макс. значения для уравнения теплопроводности.



$Q_T = \{(x,t), 0<x<l, 0<l\le T\}$

$\Gamma = \overline{Q} \setminus Q$

$\boxed{T}$ Пусть $u \in C[\overline{Q}_T]$, $u \in C^{2,1}[Q_T]$ и удовл. в Q_T

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (x,t) \in Q_T.$$

Тогда $\max\limits_{\overline{Q}_T} u(x,t) = \max\limits_{\Gamma} u(x,t)$

$$\min\limits_{\overline{Q}_T} u(x,t) = \min\limits_{\Gamma} u(x,t)$$

Док-во: от противного: пусть $\max\limits_{\Gamma} u(x,t) = M$

и $\exists\ (x_0,t_0) \in Q_T$ т.ч. $u(x_0,t_0) = M+\varepsilon$

$0<x_0<l$

$0<t_0<T$

Рассм. $v(x,t)$ т.ч.

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{\varepsilon}{2T}(t-t_0)$$

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\varepsilon}{2T}(t-t_0)$$

$|t-t_0|<T$

$\Rightarrow \max\limits_{\Gamma} v(x,t) < M + \frac{\varepsilon}{2}$

$v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M+\varepsilon$

$v(x,t) \in C[\overline{Q}_T] \Rightarrow$ она достигает max на $\overline{Q}_T$

$$\max_{\overline{Q}_T} v(x_1,t_1) = v(x_1,t_1) \geq M + \varepsilon$$

$(x_1,t_1) \in Q_T$, $\notin \Gamma$ (т.к. на Γ $\max v \leq M + \frac{\varepsilon}{2}$)

$0 < x_1 < l$, $0 < t_1 \leq T$

$$\frac{\partial^2 v(x_1,t_1)}{\partial x^2} \leq 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t}(x_1,t_1) \geq 0$$

– для максимума

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1,t_1) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1,t_1) \leq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1,t_1) = \frac{\partial v}{\partial t}(x_1,t_1) + \overbrace{\frac{\varepsilon}{2T}}^{>0} > 0$$

$(x_1,t_1) \in Q_T$

=> ... противоречие.

С min – аналогично или $\times(-1)$.

#

Единственность решения первой краевой задачи для ур-я теплопр-ти

$\boxed{T}$ Пусть ф-ции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ т.ч.

$u_i \in C[\overline{Q}_T]$, $u_i \in C^{2,1}[Q_T]$

$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x}$ $\quad (x,t) \in Q_T$

$u_i(0,t) = \mu_1(t)$ $\quad 0 \leq t \leq T$

$u_i(l,t) = \mu_2(t)$ $\quad 0 \leq x \leq l$

$u(x,0) = \varphi(x)$

Тогда $u_1 = u_2$.

Док-во: рассм. $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$
Тогда $u\in C[\overline{Q}_T]$
$u\in C^{2,1}[Q_T]$

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & (x,t)\in Q_T \\ u(0,t)=0 \\ u(l,t)=0 \\ u(x,0)=0 \end{cases}$$

=> для u справедлив принцип max значения

$$\max_{\overline{Q}_T} u(x,t)=\max_{\Gamma} u(x,t)=0$$

$$\min_{\overline{Q}_T} u(x,t)=\min_{\Gamma} u(x,t)=0$$

$=> \ u(x,t)=0$ в $\overline{Q}_T$.

#

Теорема устойчивости реш-я 1ой краевой задачи для ур-я теплопроводности

$\boxed{П}$ Пусть $u_1(x,t), u_2(x,t)$: $u_i\in C[\overline{Q}_T]$
$u_i\in C^{2,1}[Q_T]$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad (x,t)\in Q_T$$

и $u_1(x,t)\geq u_2(x,t)$ $(x,t)\in\Gamma$.

Тогда $u_1(x,t)\geq u_2(x,t)$ для $(x,t)\in\overline{Q}_T$

Док-во: рассм. $u(x,t)=u_1-u_2$
$u\in C[\overline{Q}_T]$, $u\in C^{2,1}[Q_T]$
$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)$ $(x,t)\in Q_T$

$$\min_{\overline{Q}_T} u(x,t)=\min_{\Gamma} u(x,t)\geq 0$$

$u(x,t)\geq 0$ на Γ, $u(x,t)\geq 0$ в $\overline{Q}_T$

~~$u_1(0,t)$~~

copybook

$\boxed{T}$ Пусть $u_i(x,t)$ $i=1,2$ т.ч. $u_i = C[\overline{Q}_T]$
$u_i \in C^{2,1}[Q_T]$

$$u_i(0,t)=\mu_1(t) \quad 0\le t\le T \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$$
$$u_i(l,t)=\mu_2(t)$$
$$u_i(x,0)=\varphi_i(x),\ 0\le x\le T$$

Тогда $\max\limits_{\overline{Q}_T}|u_1(x,t)-u_2(x,t)| =$

$$=\max\left\{\max_{0\le t\le T}|\mu_{11}(t)-\mu_{12}(t)|,\ \max_{0\le t\le T}|\mu_{21}(t)-\mu_{22}(t)|,\ \max_{0\le x\le l}|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\right\}$$ $= \varepsilon > 0$ (да?).

<u>Док-во</u>: рассм. $u(x,t)=u_1-u_2$ $u\in$ (–"–)

$$v^+(x,t)=\varepsilon \quad v^-(x,t)=-\varepsilon$$
$$v^\pm \in C[\overline{Q}_T],\ v^\pm\in C^{2,1}[Q_T]$$
$$v^\pm_t = a^2 v^\pm_{xx} \quad (x,t)\in Q_T.$$

$u(x,t)\le v^+(x,t)$ на Γ => по лемме
$u(x,t)< v^+(x,t)=\varepsilon$ в $\overline{Q}_T$
$v^-(x,t)\le u(x,t)$ на Γ ⊕ лемма
=> $-\varepsilon < u(x,t) < \varepsilon$ в $\overline{Q}_T$
=> $\max\limits_{\overline{Q}_T}|u(x,t)|\le\varepsilon$.

#

Единственность решения общей краевой задачи для ур-я теплопроводности.

$\boxed{T}$ Пусть ф-ции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ т.ч.

$$u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x} \subset C[\bar{Q}_T], \quad u_i \in C^{2,1}[Q_T],$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad (x,t) \in Q_T$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 u_i(0,t) - \beta_1 \frac{\partial u_i}{\partial x}(0,t) = \theta_1(t) \\ \alpha_2 u_i(l,t) + \beta_2 \frac{\partial u_i}{\partial x}(l,t) = \theta_2(t) \end{array}\right. \quad 0 \le t \le T$$

где $\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0$, $\alpha_j, \beta_j \ge 0$.

$$u_i(x,t) = \varphi(x)$$

Тогда $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ в $\bar{Q}_T$.

<u>Док-во</u>: $u = u_1 - u_2 \quad u \in C[\bar{Q}_T] \quad u_x \in C[\bar{Q}_T]$
$u \in C^{2,1}[Q_T]$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \text{ в } Q_T \\ \alpha_1 u(0,t) - \beta_1 u_x(0,t) = 0 \\ \alpha_1 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \quad 0 \le x \le l \end{cases} \quad 0 \le t \le T$$

$\cdot(2u)$: $2u u_t = a^2 2u u_{xx}$

$$\int_0^l \int_0^t 2u u_t \, d\tau \, dx = 2a^2 \int_0^t \int_0^l u u_{xx} \, dx \, d\tau$$

$$\int_0^l [u^2(x,t) - u^2(x,0)] \, dx = 2a^2 \int_0^t \Big[u(x,\tau) u_x(x,\tau)\Big|_0^l -$$

$$- \int_0^l (u_x(x,\tau))^2 dx \Big] d\tau$$

$$\overbrace{\int_0^l (u(x,t))^2dx}^{\geq 0} + \overbrace{2a^2\int_0^t\int_0^l (u_x(x,\tau))^2 dx\,d\tau}^{\geq 0} + 2a^2\int_0^t u(0,\tau)u_x(0,\tau)d\tau -$$

$$\underbrace{- 2a^2\int_0^t u(l,\tau)u_x(l,\tau)d\tau}_{\geq 0} = 0$$

Хотим док-ть, что $u(0,t)u_x(0,t)\geq 0$ $t\in[0,T]$:

<u>Случаи:</u>

① $\alpha_1=0$: $u_x(0,t)=0$ ⊕

② $\alpha_1>0$: $u(0,t)=\frac{\beta_1}{\alpha_1}u_x(0,t)$ ⊕

$u(l,t)=-\frac{\beta_2}{\alpha_2}u_x(l,t)$

$u(l,t)u_x(l,t)=-\frac{\beta_2}{\alpha_2}(u_x(l,t))^2\leq 0$

$\int_0^t u(x,t)^2 d\tau = 0$ $t\in[0,T]$

↓ $u(x,t)=0$ в $\overline{Q}_T$.

\#

$\cancel{\alpha_1 u(0,t)-\beta_1(u_x(0,t)}$

Ед-е решение задачи Коши для ур-е теплопроводности

(1) $u_t=a^2u_{xx}$ $-\infty<x<\infty$, $t>0$

(2) $u(x,0)=\varphi(x)$ $-\infty<x<\infty$

Опр. – функция $u(x,t)$ наз-ся **решением з. Коши** (1),(2), если $u\in C\{\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}^+\}$, $u\in C^{2,1}\{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\}$

$|u(x,t)|\leq M$ $\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}$ и $u(x,t)$ удовл. (1), (2).

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}}$$

Рассм. $u(x,t)$ т.ч.

$$u(x,t) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\} \varphi(s)\,ds, & (x,t)\in R\times R^+ \\ \varphi(x), \ x\in R, \ t=0 \end{cases}$$

(3)

T существования

Пусть $\varphi(x)$ т.ч. $\varphi\in C\{R\}$, $|\varphi(x)|\le M$, M-const $\forall x\in R$. Тогда $u(x,t)$, определенная (3), явл-ся решением задачи (1), (2).

Док-во: $u\in C\{R\times \bar{R}^+\}$ – надо док-ть, и $|u|\le const$.

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,s,t)\varphi(x)\,ds, \text{ где}$$

$$G(x,s,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}$$

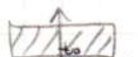
Докажем, что $\forall$ фикс. s $G(x,s,t)$ является решением (1):

$$G_x = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\exp\{..\}\cdot\left(-\frac{(x-s)}{2a^2t}\right)$$

$$G_{xx} = \frac{1}{\sqrt{..}}\exp\{..\}\frac{(x-s)^2}{4a^2t^2} - \frac{1}{\sqrt{..}}\exp\{..\}\frac{1}{2a^2t}$$

$$G_t = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{t^{3/2}}\exp\{..\} + \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\exp\{..\}\cdot \frac{(x-s)^2}{4a^2t^2}$$

$G_t = a^2 G_{xx}$ – да

$\Pi_{t_0 T}^{t_0, L} = \{(x,t), |x|\le L, 0<t_0\le t\le T\}$ 

– возьмем такой п/у-к и будем док-ть для него

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,s,t)\varphi(s)ds$$ сх-ся равн-но $\forall (x,t) \in \Pi^L_{t_0T}$

$$|G(x,s,t)| \cdot \overbrace{|\varphi(s)|}^{\le M} \le F(s) \quad \forall (x,t) \in \Pi^L_{t_0T} \ \forall s \in R$$ — нам это надо док-ть.

$$G(x,s,t) \le \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}} \cdot 1, & |s| \le L \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}} \cdot \exp\left\{-\frac{(L-s)^2}{4a^2T}\right\}, & s > L \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}} \cdot \exp\left\{-\frac{(L+s)^2}{4a^2T}\right\}, & s \le -L \end{cases} \triangleq F(s)$$

$$0 \le G(x,s,t) \le F(s) \quad \forall (x,t) \in \Pi^L_{t_0T} \quad s \in R, \quad F(s) \in C(R)$$

$$|G(x,s,t)\varphi(s)| \le M \cdot F(s)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s)ds$$

$u_x = \int G_x \varphi ds$, $u_t = \int G_t \cdot \varphi ds$, $u_{xx} = \int G_{xx} \varphi ds$ — надо док-ть, что они все сходятся.

Равн. оценки в $\Pi^L_{t_0T}$:

$$F_1(s) - |G_x(x,s,t)| \le F(s)\frac{L+|s|}{2a^2t_0}, \quad |G_{xx}(x,s,t)| \le F(s)\left[\frac{(L+|s|)^2}{4a^4t_0} + \frac{1}{2a^2t_0}\right] - F_2(s)$$

$$|G_t(x,s,t)| \le F(s)\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t_0} + \frac{(L+|s|)^2}{4a^2t_0}\right] = F_3(s)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_i(s)ds \text{ — сх-ся}, \ i=\overline{1,2,3}$$

Мы док-ли, что $u(x,t) \in C^{2,1}\{R \times R^+\}$

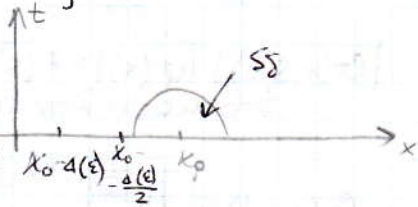
$$|u(x,t)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}\varphi(s)ds\right| \le$$

$$\le M\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}ds = M\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}dz = M$$

$\Rightarrow u(x,t)$ удовлетворяет (1) для $(x,t) \in R \times R^+$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(s)\,ds \quad t>0$$

$$\forall x_0 \in R \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ t\to 0+}} u(x,t) = \varphi(x_0)$$



$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta(\varepsilon)$ т.ч. $(x-x_0)^2 + t^2 \le \delta^2(\varepsilon)$

$|u(x,t)-\varphi(x_0)| < \varepsilon \quad \forall (x,t) \in S_\delta$

Т.к. $\varphi(x)$ непр. в x_0, то $\exists \Delta(\varepsilon)$ т.ч. $|\varphi(x)-\varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $|x-x_0| < \Delta(\varepsilon)$

У нас ε фикс. и $\Delta(\varepsilon)$ фикс.!

$\delta(\varepsilon) < \frac{\Delta(\varepsilon)}{2}$

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} ds \Rightarrow$$

$$|u(x,t)-\varphi(x_0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} [\varphi(s)-\varphi(x_0)]\,ds \right| \le$$

$$\le \underbrace{\int_{-\infty}^{x_0-\Delta(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \cdot 2M\,ds}_{I_1} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{x_0-\Delta(\varepsilon)}^{x_0+\Delta(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} ds +$$

$$+ \underbrace{2M \int_{x_0+\Delta(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} ds}_{I_2}$$

$$I_1 = 2M \int_{-\infty}^{(x_0-\Delta(\varepsilon)-x)/\sqrt{4a^2 t}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}\,dz \ominus, \quad z = \frac{s-x}{\sqrt{4a^2 t}}.$$

$$x_0-\Delta(\varepsilon)-x \le -\frac{\Delta(\varepsilon)}{2} \quad \left(x_{min} = x_0 + \frac{\Delta(\varepsilon)}{2}\right)$$

$$\ominus \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{\Delta(\varepsilon)}{2\sqrt{4a^2 t}}} e^{-z^2}\,dz \le \frac{\varepsilon}{4}$$

... #

$\boxed{T}$ единственности решение задачи Коши

Пусть $u_i(x,t)$, $i=1,2$, т.что $u_i \in C\{R \times \bar{R}^+\}$, $u_i \in C^{2,1}\{R \times R^+\}$,

$|u_i(x,t)| \leq M_i$ $(x,t) \in R \times \bar{R}^+$ и $\frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$, $(x,t) \in R \times R^+$

$u_i(x,0) = \varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$.

Тогда $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, $(x,t) \in R \times \bar{R}^+$.

Док-во: рассм. $v = u_1 - u_2$. Она $v \in C \dots$ —"—

– все условия для u_i с $M = M_1 + M_2$ и $v(x,0) = 0$.

От противного: пусть $\exists (x_0, t_0)$, $t_0 > 0$ т.ч.

$v(x_0, t_0) = v_0 > 0$

$\Pi_T^L = \{(x,t),\ |x| \leq L,\ 0 \leq t \leq T\}$ $(x_0, t_0) \in \Pi_T^L$

$|v(\pm L, t)| \leq M$ $t \in [0,T]$

$v(x,0) = 0$ $x \in [-L, L]$

Рассм. $w(x,t) = \frac{2M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$: $w \in C[\bar{\Pi}_T^L]$
$w \in C^{2,1}[\Pi_T^L]$

$w_t = a^2 w_{xx}$ в Π_T^L

$v(-L,t) \leq M \leq w(L,t)$ $t \in [0,T]$

$v(L,t) \leq M \leq w(L,t)$

$\underset{=0}{v(x,0)} \leq w(x,0)$

По следствию из принципа максимума:

$v(x,t) \leq w(x,t)$ в $\bar{\Pi}_T^L$

$0 < V_0 = v(x_0, t_0) \leq \frac{2M}{L^2}\left[\frac{x_0^2}{2} + a^2 t_0\right] \xrightarrow{L \to \infty} 0$

Устремим $L \to \infty$, получим противоречие.

#

~~$u_t = a^2 u_{xx}$ $-\infty < x < \infty$~~

Свойства функции $G(x,s,t)$:

1) $G(x,s,t) > 0$ $x, s \in R$, $t \in R^+$

2) $G(x,s,t) = G(s,x,t)$

3) $G_t = a^2 G_{xx}$, $G_t = a^2 G_{ss}$

Рассм. $\varphi(x) \geq 0 \Rightarrow u(x,t) = \int_a^b G(x,s,t)\underbrace{\varphi(s)}_{\geq 0} ds \geq 0 \quad \forall x \in R, \; t \in R^+$

Решение краевых задач для ур-е теплопров-ти на полупрямой

- Рассм. первую краевую задачу:

$$\begin{cases} (1) & u_t = a^2 u_{xx} \quad x>0, \; t>0 \\ (2) & u(0,t)=0, \; t>0 \\ (3) & u(x,0) = \varphi(x), \; x \geq 0 \end{cases}$$

Введем $U(x,t)$ т.ч. $U_t = a^2 U_{xx}$ $-\infty < x < \infty$, $t>0$

$U(x,0) = \Phi(x)$, $-\infty < x < \infty$

где $\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x<0 \end{cases}$

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\} \Phi(s) ds$$

Пусть $u(x,t) = U(x,t)$ $x \geq 0$, $t \geq 0$: $\Rightarrow$

1) $u(x,t)$ удовл. (1)

2) $u(x,0) = \varphi(x)$ $x \geq 0$ (3)

3) ? было?

$$U(0,t) = U(0,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{s^2}{4a^2t}\right\}}_{\text{четная}} \underbrace{\Phi(s)}_{\text{нечетная}} ds = 0 \quad \forall t$$

нечетная

$$u(x,t) = U(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\} \varphi(s) ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} - \text{"} - \cdot (-\varphi(-s)) ds$$

заделаем сюда $d(-s)$ и изменяем знаки где нужно, потом $-s \Rightarrow s$

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2t}\right\}\right] \cdot \varphi(s) ds$$

• Рассм. вторую краевую задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & \begin{matrix} x>0 \\ t>0 \end{matrix} \\ u_x(0,t)=0 & t\geq 0 \\ u(x,0)=\varphi(x) & x\geq 0 \end{cases}$$

Введем $U(x,t)$:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} & -\infty<x<\infty,\ t>0 \\ U(x,0)=\Phi(x) & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

$$\Phi(x)=\begin{cases} \varphi(x), & x\geq 0 \\ \varphi(-x), & x<0 \end{cases}$$

$$U(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}\Phi(s)\,ds$$

Получим:

$$u(x,t)=U(x,t) \qquad \begin{matrix} x\geq 0 \\ t\geq 0 \end{matrix}$$

(1) и (3) выполнены

Проверим выполнение кр. условия:

$$u_x(0,t)=U_x(0,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\left\{-\frac{s^2}{4a^2t}\right\}}_{\text{чет}}\underbrace{\frac{s}{2a^2t}}_{\text{нечет.}}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\Phi(s)}_{\text{четн.}}ds$$ => вместе нечетные => интеграл по всей прямой от нечетн. ф. $=0$.

=> (2) вып.

$$u(x,t)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}\varphi(s)\,ds+\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{(x-\tilde{s})^2}{4a^2t}\right\}\varphi(-\tilde{s})\,d\tilde{s} \to$$ опять заменим $\tilde{s}$ на s

$$\Rightarrow u(x,t)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\left[\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}+\exp\left\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2t}\right\}\right]\varphi(s)\cdot$$

$$\cdot ds$$

Интегральное представление решения 1ой краевой задачи для ур-я теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0<x<l, \; t>0 \\ u(0,t) = 0 & t>0 \\ u(l,t) = 0 & \\ u(x,0) = \varphi(x) & \end{cases}$$

Решение: $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(s) \sin\frac{\pi n}{l} s \, ds \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \cdot \sin\frac{\pi n}{l} x$.

Получим инт. предст-е:

$$u(x,t) = \int\limits_0^l G(x,s,t)\varphi(s)\, ds$$

где $G(x,s,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\frac{\pi n}{l} x \, \sin\frac{\pi n}{l} s \, e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}$:

$G(x,s,t)$ опр. при $x,s \in [0,l]$ $t>0$

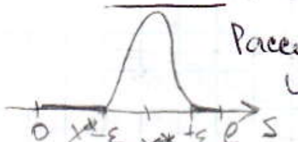
G_{xx} и G_t существуют всюду в этой полосе, они непр. на ней

$G(x,s,t) = G(s,x,t)$

$G_t = a^2 G_{xx}$

$\boxed{T}$ $G(x,s,t) \geq 0$ при $x,s \in [0,l]$, $t>0$

Док-во: $u(x,t) = \int\limits_0^l G(x,s,t)\varphi(s)ds$



Рассм.
$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_\varepsilon(s) \geq 0 & s \in (x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon) \\ 0, & s \in [0,l] \setminus (x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon) \end{cases}$$

$x^* \in (0,l)$

$$\int\limits_{x^*-\varepsilon}^{x^*+\varepsilon} \tilde{\varphi}_\varepsilon(s)ds = 1$$

Устремим $\varepsilon \to 0$.

$$u_\varepsilon(x,t) = \int\limits_0^l G(x,s,t)\varphi_\varepsilon(s)ds = \int\limits_{x^*-\varepsilon}^{x^*+\varepsilon} G(x,s,t)\tilde{\varphi}_\varepsilon(s)ds =$$

$$= \{\text{теорема о среднем}\} = G(x, s_\varepsilon, t) \int\limits_{x^*-\varepsilon}^{x^*+\varepsilon} \tilde{\varphi}_\varepsilon(s)ds$$

При $\varepsilon \to 0$ $\hat{S}_\varepsilon \in [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$, G непр. $\Rightarrow$ $\hat{S}_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} x^*$

$\Rightarrow G(x, x^*, t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x, t)$

$\min\limits_{\substack{x \in [0, l] \\ t \in [0, T]}} u_\varepsilon(x,t) = \min\limits_{\Gamma} u_\varepsilon(x,t) \geq 0$ (из принципа макс. значения)

#

Уравнения эллиптического типа

Примеры физ. задач, приводящие к уравнению Лапласа и Пуассона

Рассм. ур-е теплопроводности в пр-ве:

$u_t = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t)$

Пусть $u(x,y,z)$ не зависит от t

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа

$\Delta u = -f_1(x, y, z)$ – уравнение Пуассона

$\Delta u = 0$ – уравнение Лапласа

(описывают стационарные физич. поля)

• E^2:

Уравнение Лапласа:

$\Delta u = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Уравнение Пуассона:

$\Delta u = f(x,y) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$

• $\mathbb{E}^3$:

Лаплас: $\Delta u = 0$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Пуассон: $\Delta u = f(x,y,z)$

Фундаментальное решение уравнение Лапласа

$\mathbb{E}^3$: $u(x,y,z) = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$

Док-м, что $\Delta \frac{1}{R} = 0$ $\quad \forall M(x,y,z) \neq M_0(x_0,y_0,z_0)$, т.е. $1/R$ – решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{2(x-x_0)}{R^3} = -\frac{(x-x_0)}{R^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{R^3}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2(x-x_0)^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} =$$

$$= \frac{3(x-x_0)^2}{R^5} - \frac{1}{R^3}$$

По y и по z – то же самое.

Получим $\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{3(x-x_0)^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} + \frac{3(y-y_0)^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} + \frac{3(z-z_0)^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} =$

$$= \frac{3R^2}{R^5} - \frac{3}{R^3} = 0$$

$\boxed{\frac{1}{R}}$ – фунд. решение уравн-е Лапласа в простр-ве

$\mathbb{E}^2$: $\rho(x,y) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\ln\rho) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{2} \frac{2(x-x_0)}{\rho} = \frac{x-x_0}{\rho^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln\rho) = \frac{1}{\rho^2} - 2\frac{1}{\rho^3}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\rho}2(x-x_0)^2 = \frac{1}{\rho^2} - \frac{2(x-x_0)^2}{\rho^4}$$

$$\Delta(\ln\rho) = \frac{1}{\rho^2} - \frac{2(x-x_0)^2}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2} - \frac{2(y-y_0)^2}{\rho^4} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\ln\rho(x,y)}$ – фунд. решение ур-е Лапласа на плоскости

Постановка краевых задач для ур-й Лапласа и Пуассона

$\mathbb{R}^3$, $\overset{\Sigma}{\Omega}$ Ω - откр. область

• **Внутренняя задача Дирихле**

Найти $u(x,y,z)$ т.ч.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega \\ u(x,y,z) = \varphi(x,y,z) \quad (x,y,z) \in \Sigma \text{ - граница} \end{cases}$$

Внутренняя задача Неймана

Найти $u(x,y,z)$ т.ч.

$$\Delta u = 0 \qquad (x,y,z) \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) = \nu(x,y,z) \quad (x,y,z) \in \Sigma$$

n - внешняя нормаль

• **Внешняя задача Дирихле**

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \\ u(x,y,z) = \varphi(x,y,z) \quad (x,y,z) \in \Sigma \end{cases}$$

Внешняя задача Неймана

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) = \nu(x,y,z) \quad (x,y,z) \in \Sigma \end{cases}$$

Аналогично для двумерного случая.

Формула Остроградского-Гаусса:

$$\vec{A}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} (\vec{A}\vec{n})\, d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} A\, d\tau$$

$u(x,y,z)$, $v(x,y,z) \in C^2(\overline{\Omega})$

$\vec{A}(x,y,z) = u \cdot \operatorname{grad} v$ ← векторное поле

$$\iint\limits_{\Sigma} (u \cdot \operatorname{grad} v, \vec{n})\, d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)\, d\tau \Leftrightarrow$$

$$(\operatorname{grad} v \cdot \vec{l}) = \frac{\partial v}{\partial l}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\iint\limits_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} u \Delta v\, d\tau + \iiint\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v)\, d\tau}$$

подставляем

$\ominus$ $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = \ldots$ 1ая формула Грина

$$\iint\limits_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} v \Delta u\, d\tau + \iiint\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u)\, d\tau$$

2ая формула Грина

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} [u \Delta v - v \Delta u]\, d\tau = \iint\limits_{\Sigma} \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right] d\sigma}$$

$u, v \in C^2(\overline{\Omega})$

$u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

3-е формула Грина:

шарик вокруг (о) M_0

$u(x,y,z) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

$v(x,y,z) = \frac{1}{R_{MM_0}}$

Ω_ε огранич. снаружи Σ, внутри – Σ_ε

$R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

$M(x,y,z)$ $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} \Big[u \underbrace{\Delta\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right)}_{=0} - \frac{1}{R_{MM_0}} \Delta u\Big] d\tau = \iint\limits_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n}\right] d\sigma + \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n}\right] d\sigma$$

Смотрим пределы:

1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\underbrace{\frac{1}{R_{MM_0}}}_{=\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma = \left\{\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\le const\ \ (x,y,z)\in\Sigma_\varepsilon\right\} = 0$

2) $M(x,y,z)\quad M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$\vec{n} = \left\{-\frac{(x-x_0)}{R_{MM_0}},\ -\frac{(y-y_0)}{R_{MM_0}},\ -\frac{(z-z_0)}{R_{MM_0}}\right\}$$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) = \left\{-\frac{(x-x_0)}{R^3_{MM_0}},\ -\frac{(y-y_0)}{R^3_{MM_0}},\ -\frac{(z-z_0)}{R^3_{MM_0}}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) = -\frac{1}{R^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{R}\,2(x-x_0) = \frac{(x-x_0)}{R^3_{MM_0}}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right)d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} u\,d\sigma = \{\text{по т. о среднем}\} =$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) = \left(\vec{n}, \operatorname{grad}\frac{1}{R}\right) = \frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{R}\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} u\,d\sigma = u(M^*)\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2 = u(M^*)\cdot 4\pi$$

$M^*\in\Sigma_\varepsilon$

$M^* \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} M_0$

В итоге 3-я формула Грина:

$$\boxed{4\pi u(M_0) = -\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{R_{MM_0}}\Delta u\,d\tau - \iint\limits_{\Sigma}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) - \frac{1}{R_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}\right]d\sigma}$$

Для двумерного случая аналогично:

$$\iint\limits_{D}[u\Delta v - v\Delta u]\,ds = \int\limits_{L}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dl \quad - 2\ \text{ФГ}$$

$$2\pi u(M_0) = -\iint\limits_{D}\ln\frac{1}{R_{MM_0}}\Delta u\,ds - \int\limits_{L}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{R_{MM_0}} - \ln\frac{1}{R_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dl$$

Гармонические функции и их свойства.

Пусть $\Omega \subset R^1$ $\quad u(x_1 \dots x_n)$

Опр. - Функция $u(x_1 \dots x_n)$ наз-ся **гармонической** в Ω если $u \in C^2(\Omega)$.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \quad \text{в } \Omega \end{cases}$$

Из ТФКП: $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \text{ — условие Коши-Римана}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Свойства:

① Пусть $u(x,y,z)$ гармонична в Ω, тогда для $\forall$ замкн. $\tilde{\Sigma} \subset \Omega$ $\quad \int\limits_{\tilde{\Sigma}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$.

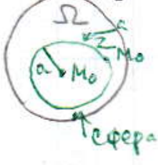
Док-во: пусть $v(x,y,z) = 1$. По 2ой ф-ле Грина

$$\iiint\limits_{\tilde{\Omega}} [\underbrace{u(\Delta 1)}_{=0} - \underbrace{1 \Delta u}_{=0 \text{ (гарм.)}}] \, d\tau = \iint\limits_{\tilde{\Sigma}} [\underbrace{u \frac{\partial}{\partial n}(1)}_{=0} - 1 \frac{\partial u}{\partial n}] \, d\sigma$$

огранич $\tilde{\Sigma} \longrightarrow \tilde{\Omega}$ $\quad$ т.к.

② $\boxed{\text{Т}}$ **о среднем значении**

Пусть $u(x,y,z)$ гарм. в Ω. Тогда $\forall M_0 \in \Omega$



$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{\Sigma^a_{M_0} \subset \Omega} u(M) \, d\sigma$$

Док-во: рассм. шар $\Omega^a_{M_0}$, ограниченный $\Sigma^a_{M_0}$. Он внутри Ω.

По 3ей формуле Грина:

$$4\pi u(M_0) = -\underbrace{\iiint\limits_{\Omega^a_{M_0}} \frac{1}{R_{MM_0}} \Delta u \, d\tau}_{=0} - \iint\limits_{\Sigma^a_{M_0}} \left[u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma$$

Для гарм. ф-ции в 3ей ф.Гр $\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{R_{MM_0}} \Delta u \, d\tau \equiv 0$

$$\Rightarrow 4\pi u(M_0) = -\iint\limits_{\Sigma^a_{M_0}} u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) d\sigma$$

$$\vec{n} = \left\{ \frac{(x-x_0)}{R^2_{MM_0}}, \frac{(y-y_0)}{R^2_{MM_0}}, \frac{(z-z_0)}{R^2_{MM_0}} \right\}$$

$$\operatorname{grad} \frac{1}{R_{MM_0}} = \left\{ -\frac{(x-x_0)}{R^3_{MM_0}}, -\frac{(y-y_0)}{R^3_{MM_0}}, -\frac{(z-z_0)}{R^3_{MM_0}} \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{R^4_{MM_0}} = -\frac{1}{R^2_{MM_0}} = -\frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow \text{получим } u(M_0) = -\iint\limits_{\Sigma^a_{M_0}} u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) d\sigma = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{\Sigma^a_{M_0}} u \, d\sigma$$

#

3-е формула Грина для гарм. функции:

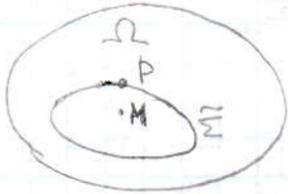
$$4\pi \cdot u(M_0) = -\iint\limits_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial}{\partial n} u \right] d\sigma$$

Формула среднего значения в $\mathbb{R}^2$

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{L^a_{M_0}} u \, dl$$

$\boxed{T}$ Если функция $u(x,y,z)$ гармонична в Ω, то $u \in C^{\infty}(\Omega)$

<u>Док-во</u>:



3я формула Грина для гарм. функций u и $\tilde{\Sigma}$:

$$u(M) = \frac{-1}{4\pi} \iint\limits_{\tilde{\Sigma}} \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) - \frac{1}{R_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n}(P) \right] d\sigma$$

$M(x,y,z)$

$P(\xi,\eta,\rho)$

$$R_{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - (z-\rho)^2}$$

$$u(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\tilde{\Sigma}} \left[u(\xi,\eta,\rho) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\sqrt{\ldots}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\ldots}} \cdot \frac{\partial}{\partial n} u(\xi,\eta,\rho) \right] d\sigma$$

Все f-лы у нас собственные, подынт. ф-ции дифференцируемы => u ∞ дифф-ма. (особенностей никаких нет)

Принцип максимального значения

$\boxed{T}$ Пусть $u \in C(\overline{\Omega})$ и u – гармоническая в Ω. Тогда

$$\max_{\overline{\Omega}} u(x,y,z) = \max_{\Sigma} u(x,y,z) \quad \Sigma \text{ – граница } \Omega$$

$$\min_{\overline{\Omega}} u(x,y,z) = \min_{\Sigma} u(x,y,z).$$

<u>Док-во</u>: Пусть $U_m = \max_{\overline{\Omega}} u(x,y,z)$ и $\exists (x_0,y_0,z_0) \stackrel{\Delta}{=} M_0$ т.ч.

$u(M_0) = U_m$, $M_0 \in \Omega$ – т.е. пусть max достигается во внутр. точке.

Сфера $\Sigma_{M_0}^{a}$ в Ω – радиуса a вокруг точки M_0.

По формуле ср. значения $u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{\Sigma_{M_0}^{a}} u(p)\, d\sigma_p$

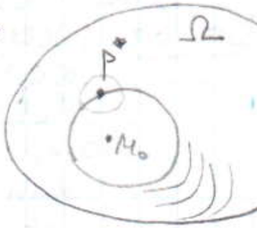
След. $u(P) = U_m \ \forall p \in \Sigma_{M_0}^{a}$.

=> максимум достигается $\forall$ точке сферы.

Пусть не так - тогда $\exists p^* \subset \Sigma^a_{M_0}$ $u(p^*) < U_m$

$$\Rightarrow u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{\Sigma^a_{M_0}} u(p)\,d\sigma_p < \frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{\Sigma^a_{M_0}} U_m\,d\sigma =$$

$$= \frac{U_m}{4\pi a^2}\underbrace{\iint\limits_{\Sigma^a_{M_0}} d\sigma}_{=\text{площадь сферы}} = U_m \Rightarrow \text{противоречие}$$



#

Получили, что если $u \in C(\overline{\Omega})$ и u гарм. в Ω, то если она достигает максимума внутри Ω, то $u = const$.

Если $u(P) \geq 0$ на Σ и $\exists u(p^*) > 0$, $p^* \in \Sigma \Rightarrow u > 0$ везде (т.к. минимум достигается тоже на границе).

Теоремы единственности и устойчивости решения внутр. задачи Дирихле

<u>Опр.</u> - функция $u(x,y,z)$ - решение внутр. задачи Д., если
1) $u \in C(\overline{\Omega})$
2) u гармоническая в Ω ($u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ в Ω)
3) $u(x,y,z) = \varphi(x,y,z)$ $(x,y,z) \in \Sigma$

$\boxed{\text{T}}$ Единственности

Пусть $u_i(x,y,z)$ $i = 1,2$, т.ч. $u_i \in C(\overline{\Omega})$, u_i гарм. в Ω, $u_1(x,y,z) = u_2(x,y,z) = \varphi(x,y,z)$ $(x,y,z) \in \Sigma$.

Тогда $u_1 = u_2$ в $\overline{\Omega}$.

<u>Док-во</u>: $v(x,y,z) = u_1 - u_2$ ($v \in C(\overline{\Omega})$, v гарм. в Ω, $v(x,y,z) = 0$ на Σ.

справедлив принцип max значения

$$\max_{\overline{\Omega}} v = \max_{\Sigma} v = 0, \quad \min_{\overline{\Omega}} v = \min_{\Sigma} v = 0$$

$\Rightarrow v(x,y,z) = 0$ в $\overline{\Omega}$.

#

$\boxed{\text{П}}$ Пусть $u_i(x,y,z)$ $i=1,2$ т.ч. $u_i \in C(\overline{\Omega})$, u_i гарм. в Ω
и $u_1(x,y,z) \geq u_2(x,y,z)$ $(x,y,z) \in \Sigma$.

Тогда $u_1(x,y,z) \geq u_2(x,y,z)$ в $\overline{\Omega}$.

<u>Док-во</u>. рассм. $v(x,y,z) = u_1(x,y,z) - u_2(x,y,z)$
$v \in C(\overline{\Omega})$, v гарм. в Ω
$v(x,y,z) \geq 0$ на Σ.

По принципу максимума для v
$$\min_{\overline{\Omega}} v = \min_{\Sigma} v \geq 0$$
$$v(x,y,z) \geq 0 \quad \forall (x,y,z) \in \overline{\Omega}.$$

\#

$\boxed{\text{Т}}$ устойчивости

Пусть $u_i(x,y,z)$ $i=1,2$. т.ч. $u_i \in C(\overline{\Omega})$, u_i гарм. в Ω,
$u_1(x,y,z) = \varphi_1(x,y,z)$
$u_2(x,y,z) = \varphi_2(x,y,z)$ $(x,y,z) \in \Sigma$

Тогда $\max\limits_{(x,y,z)\in\overline{\Omega}} |u_1(x,y,z) - u_2(x,y,z)| = \max\limits_{(x,y,z)\in\Sigma} |\varphi_1(x,y,z) - \varphi_2(x,y,z)|$.

<u>Док-во</u>: рассм. $v(x,y,z) = u_1(x,y,z) - u_2(x,y,z)$
$v \in C(\overline{\Omega})$, v гарм. в Ω, $v(x,y,z) = \hat{\varphi} = \varphi_1 - \varphi_2$ $\forall (x,y,z) \in \Sigma$

$$\Phi_m = \max_{\Sigma} |\varphi_1(x,y,z) - \varphi_2(x,y,z)| = \max_{\Sigma} |\hat{\varphi}(x,y,z)|$$

Рассм. 2 <u>функции</u> $V^+(x,y,z)$ и $V^-(x,y,z)$:

$V^+ = \Phi_m$, $V^- = -\Phi_m$. V^+ и $V^- \in C(\overline{\Omega})$, гарм. в Ω.

$v(x,y,z) \geq V^-(x,y,z)$ на Σ
$v(x,y,z) \leq V^+(x,y,z)$ на Σ

$v(x,y,z) \geq V^-(x,y,z)$ на $\overline{\Omega}$ по лемме
$v(x,y,z) \leq V^+(x,y,z)$ на $\overline{\Omega}$

$\Rightarrow |v(x,y,z)| \leq \Phi_m$ $(x,y,z) \in \overline{\Omega}$

\#

Внутренняя задача Неймана ($\mathbb{R}^3$)

Опр. – функция $u(x,y,z)$ наз-ся **решением** вн. з. Н., если
1) $u(x,y,z) \in C^1(\overline{\Omega})$
2) u гарм. в Ω (т.е. $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ в Ω)
3) $\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) = \psi(x,y,z)$ на Σ

$\boxed{T}$ единственности
Пусть $u_i(x,y,z)$ $i=1,2$ т.ч. $u_i \in C^1(\overline{\Omega})$, u_i гарм. в Ω
$\frac{\partial u_1}{\partial n}(x,y,z) = \frac{\partial u_2}{\partial n}(x,y,z) = \psi(x,y,z)$ на Σ.
Тогда $u_1 - u_2 = const$ на $(x,y,z) \in \overline{\Omega}$.

Док-во: рассм. $v(x,y,z) = u_1 - u_2$ $\begin{cases} v \in C^1(\overline{\Omega}), \text{ гарм. в } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n}(x,y,z) = 0 \text{ в } \Sigma \end{cases}$

в 1ой формуле Грина возьмем $u = v$:

$$\iiint\limits_{\Omega} v \underbrace{\Delta v}_{=0} d\tau = \iint\limits_{\Sigma} v \underbrace{\frac{\partial v}{\partial n}}_{=0} d\sigma - \iiint\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} v) d\tau$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \text{ в } \overline{\Omega} \Rightarrow v = const.$$

#

Необх. условие разрешимости внутр. задачи Неймана
Если $u \in C^1(\overline{\Omega})$, u гарм. в Ω и $\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) = \psi(x,y,z)$ в Σ, то $\iint\limits_{\Sigma} \psi(P) d\sigma_P = 0$

Док-во: по 1 ф. Грина $\iiint\limits_{\Omega} v \overset{=0}{\Delta u} (d\tau) = \iint\limits_{\Sigma} \overset{1}{v} \overset{=\psi}{\frac{\partial u}{\partial n}} d\sigma - \iiint\limits_{\Omega} \overset{=0}{(\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u)} d\tau$

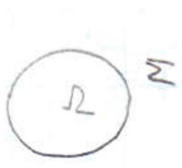
$$\Rightarrow \iint\limits_{\Sigma} \psi \, d\sigma = 0.$$

#

Внешняя задача Дирихле в $\mathbb{R}^3$

Опр. – функция $u(x,y,z)$ наз. решением внеш. з. Д., если

1) $u \in C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$
2) u гарм. в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$
3) $u(x,y,z) = \varphi(x,y,z) \quad (x,y,z) \in \Sigma$
4) $u(x,y,z) \rightrightarrows 0 \quad \{(x,y,z) \to \infty\}$



$\boxed{T}$ единственности

Пусть $u_i(x,y,z)$, $i=1,2$, $u_i \in C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$, u_i гарм. в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, $u_1(x,y,z) = u_2(x,y,z) = \varphi(x,y,z)$ на Σ и $u_i(x,y,z) \rightrightarrows 0 \quad (x,y,z) \to \infty$

Тогда $u_1 = u_2$.

Док-во: $v(x,y,z) = u_1 - u_2$, $v \in C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$, v гарм. в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$,

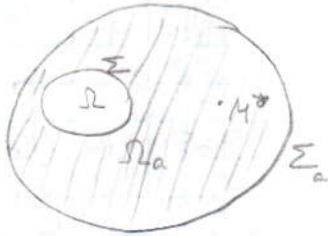
$v(x,y,z) = 0 \quad (x,y,z) \in \Sigma$

$v(x,y,z) \rightrightarrows 0$ при $(x,y,z) \to \infty$.

Пусть $v \not\equiv 0$, т.е. $\exists M^* = (x^*, y^*, z^*)$ т.ч. $v(M^*) = \varepsilon > 0 \quad M^* \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$

Рассм. Σ_a : $x^2+y^2+z^2 = a^2$

Ω_a – бублик.



$\max\limits_{\overline{\Omega_a}} v = \max\limits_{\Sigma + \Sigma_a} v$ (– принцип max)

$a \to \infty \Rightarrow |v| \le \frac{\varepsilon}{2}$

$\varepsilon = v(M^*) \le \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$ противоречие.

#

Пример неединств-ти без условия 4:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ u(x,y,z) = c \end{cases}$$

Решение 1: $u_1(x,y,z) = c \quad (\ominus 4)$

Решение 2: $u_2(x,y,z) = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{c}{R} \quad (\oplus 4)$

Внешняя задача Дирихле в $\mathbb{R}^2$

$E^2\setminus\overline{D}$

Опр - функция $u(x,y)$ наз-ся решением внешней задачи Дирихле в $\mathbb{R}^2$, если:
1) $u\in C(E^2\setminus D)$
2) u гарм. в $E^2\setminus\overline{D}$
3) $u(x,y)=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in L$
4) $|u(x,y)|<const$ $(x,y)\in E^2\setminus D$

$\boxed{T}$ единственности

Пусть $u_i(x,y)$, $i=1,2$, $u_i\in C(E^2\setminus D)$, u_i гарм. в $E^2\setminus\overline{D}$, $u_1(x,y)=u_2(x,y)=\varphi(x,y)$ $(x,y)\in L$

$|u_i(x,y)|\le M_i$ на $E^2\setminus D$

Тогда $u_1(x,y)=u_2(x,y)$ в $E^2\setminus D$.

Док-во: $v(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$, $v\in C(E^2\setminus D)$

v гарм. в $E^2\setminus\overline{D}$

$v=0$ на L

$|v(x,y)|\le M$ на $E^2\setminus D$

$M=M_1+M_2$

Докажем что $v\equiv 0$.

Пусть не так:

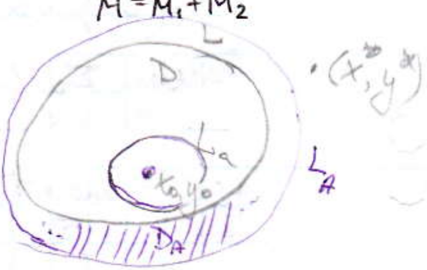
пусть $\exists(x^*,y^*)$ т.ч.

$v(x^*,y^*)=\varepsilon>0$ $(x^*,y^*)\in E^2\setminus\overline{D}$

Выберем $(x_0,y_0)\in D$:

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2$

$L_a\in D$ - граница ~~круга~~ бублика D_A



Еще окружность вокруг D с ц. (x_0,y_0): $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=A^2$

$$w_A(x,y)=M\frac{\ln\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{a}}{\ln\frac{A}{a}}$$

$w_A(x,y)\in C(\overline{D}_A)$, w_A гарм. в D_A

$v\in C(\overline{D}_A)$, v гарм. в D_A

На границе $0 = v(x,y) < w_A(x,y)$, $(x,y)\in L$.

$|v(x,y)| \le M$ на L_A

$w(x,y) = M$ на L_A $\Rightarrow$ $\boxed{v(x,y) \le w_A(x,y) \text{ на } L\cup L_A}$

$v(x,y) \le w_A(x,y)$ в $\overline{D_A}$

$$\varepsilon = v(x^*,y^*) \le w_A(x^*,y^*) = M\,\frac{\ln \frac{\sqrt{(x^*-x_0)^2+(y^*-y_0)^2}}{a}}{\ln \frac{A}{a}} \xrightarrow[A\to\infty]{} 0$$

#

<u>Пример неединственности:</u> $x^2+y^2=1$ $D: x^2+y^2\le 1$

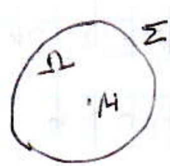
$E^2\setminus\overline{D}$ $x^2+y^2>1$ $\varphi(x,y) = C$ на L

Решение: 1) $u_1(x,y) = c$ уд.ч ⊕

2) $u_2(x,y) = c + \ln\sqrt{x^2+y^2}$ в $E^2\setminus D$ уд.ч ⊖

Функция Грина для внутр. задачи Дирихле

E^3 $u\in C^1(\overline{\Omega})$, u гарм. в Ω



$M(x,y,z)$, $P(\xi,\eta,\zeta)$.

3-я ф. Грина для гарм. ф.:

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[u(P)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R_{MP}} - \frac{1}{R_{MP}}\frac{\partial}{\partial n}u(P)\right]d\sigma_P$$

Рассм. $v(x,y,z)\in C^1(\Omega)$ v гарм. в Ω тогда для u и v справедлива 2 ф. Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\overset{=0}{\Delta v} - v\overset{=0}{\Delta u})\,d\tau = \iint\limits_{\Sigma}\left[u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right]d\sigma$$

$$0 = \iint\limits_{\Sigma}\left[u(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n} - v(P)\cdot\frac{\partial u(P)}{\partial n}\right]d\sigma_P$$

$$u(M) = -\iint\limits_{\Sigma}\left[u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi R_{MP}}+v(P)\right)-\left(\frac{1}{4\pi R_{MP}}+v(P)\right)\frac{\partial u(P)}{\partial n}\right]d\sigma$$

$$G(M,P)=\frac{1}{4\pi R_{MP}}+v(P)$$

$$u(M) = -\iint\limits_{\Sigma}\left[u(P)\frac{\partial}{\partial n}G(M,P)-\cancel{G(M,P)\frac{\partial u}{\partial n}}\right]d\sigma_P$$

<u>Опр.</u> — функция $G(M,P)$ наз-ся **функцией Грина** для внутр. задачи Дирихле в Ω, если

1) $\forall M\in\Omega$ $G(M,P)$ — нек. функция от ξ,η,ζ, удовлетв. $\Delta_{\xi\eta\zeta}G(M,P)=0$ $\forall P\neq M$

2) $G(M,P)$ $\forall M\in\Omega$ представима в виде
$$G(M,P)=\frac{1}{4\pi R_{MP}}+v(M,P),$$ где $v(M,P)$ гарм-на в Ω на P

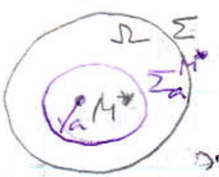
3) $G(M,P)=0$ на $P\in\Sigma$

$$G=\frac{1}{4\pi R_{MP}}+v(M,P), \quad v(M,P)=-\frac{1}{4\pi R_{MP}}, \; P\in\Sigma$$

Свойства функции Грина:

① $G(M,P)>0$ при $P\in\Omega$

<u>Док-во</u>:



$G(M^*,P)>0$ $\forall P\in\Omega,\ P\neq M^*$

$\Sigma_a^{M^*}$; $v(M,P)$ огр. в этой сфере

$$G(M^*,P)>0 \text{ на } \Sigma_a^{M^*}$$

$$G(M^*,P)=0 \text{ на } \Sigma \text{ (по опр.)}$$

$$\Delta G(M^*,P)=0$$

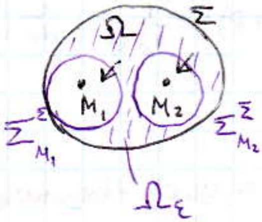
$\Rightarrow$ по принципу max $G(M^*,P)\geq 0$ в $\Omega_a=\Omega\setminus Ш$ (шар вокр. M^*)

$$G(M^*,P)>0.$$

\#

② $G(M,P) = G(P,M)$

Док-во: $\underset{u(P)}{G(M_1,P)}$, $\underset{v(P)}{G(M_2,P)}$ — возьмем такие штуки две.



Ω_ε огранич. $\Sigma, \Sigma^\varepsilon_{M_1}, \Sigma^\varepsilon_{M_2}$.

По .. формуле Грина

$$\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u)\,d\tau =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma + \iint\limits_{\Sigma^\varepsilon_{M_1}} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{\Sigma^\varepsilon_{M_2}} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma$$

$$\iint\limits_{\Sigma^\varepsilon_{M_1}} \Big[\underbrace{\overset{\sim\frac{1}{\varepsilon}}{G(M_1,P)}\overset{\text{хор.}}{\frac{\partial G}{\partial n}(M_2,P)}}_{\int \text{от этой штуки} \underset{\varepsilon\to0}{\to} 0} - \overset{\text{хор.}}{G(M_2,P)}\frac{\partial G}{\partial n}(M_1,P)\Big]d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{\Sigma^\varepsilon_{M_2}} \Big[G(M_1,P)\frac{\partial G}{\partial n}(M_2,P) - G(M_2,P)\frac{\partial G}{\partial n}(M_1,P)\Big]d\sigma = 0$$

1) $\frac{\partial G}{\partial n}(M_2,P) \underset{\varepsilon\to0}{\to} \frac{\partial G}{\partial n}(M_2,M_1)$

$G(M_1,P) = \frac{1}{4\pi R_{M,P}} + v(M_1,P) \Rightarrow$

2) $\frac{\partial G}{\partial n}(M_1,P) \overset{\sim\frac{1}{4\pi\varepsilon}}{=} \underbrace{\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi R_{M,P}}\right)}_{\frac{1}{4\pi}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{R_{M,P}}, n\right)} + \overset{\text{хор.}}{\frac{\partial}{\partial n}\left(v(M_1,P)\right)}$

$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R_{M,P}}\right) = 2 - \frac{1}{R^2_{M,P}} \cdot \frac{1}{2}\frac{2(\xi - x_1)}{R_{M,P}} = -\frac{(\xi - x_1)}{R^2_{M,P}}$

$$\vec{n} = \left\{ -\frac{\xi - x_1}{R_{M,P}}, -\frac{\eta - y_1}{R_{M,P}}, -\frac{\varsigma - z_1}{R_{M,P}} \right\}$$

$$\to \frac{\partial}{\partial n} G(M_1,P) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2_{M,P}} + \frac{\partial}{\partial n}\left(v(M,P)\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} + \frac{\partial}{\partial n}\left(v(M,P)\right)$$

(посчитать!!)

Потенциал простого слоя Потенциал двойного слоя

$$E^3: \quad \iint\limits_{\Sigma} g(P)\frac{1}{R_{MP}}\,d\sigma_P \qquad -\iint\limits_{\Sigma} f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)d\sigma_P \quad \forall M \notin \Sigma$$

$$E^2: \ln\frac{1}{\rho_{MP}} \qquad \int\limits_L g(P)\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\,dl_P \qquad -\int\limits_L f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right)dl_P \quad \forall M \notin L$$

$$\Delta_M\left(-\int f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right)dl_P\right) = -\int\limits_L f(P)\Delta_M\left(\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right)dl_P =$$

$$= -\int\limits_L f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\Delta_M\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right)\right)dl_P = 0$$

Потенциал двойного слоя на плоскости

$$E^2: \quad u(M) = -\int\limits_L f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right)dl_P =$$

$$= \int\limits_L f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\rho_{MP}\right)dl_P \ominus$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\rho_{MP}\right) = \left(\operatorname{grad}\ln\rho_{MP}\cdot\vec{n}\right)$$

$$\rho_{MP} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \qquad \begin{matrix} M(x,y) \\ P(\xi,\eta) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\ln\rho_{MP}\right) = \frac{1}{\rho_{MP}}\cdot\frac{1}{\rho_{MP}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2(\xi - x) = \frac{(\xi - x)}{\rho^2_{MP}}$$

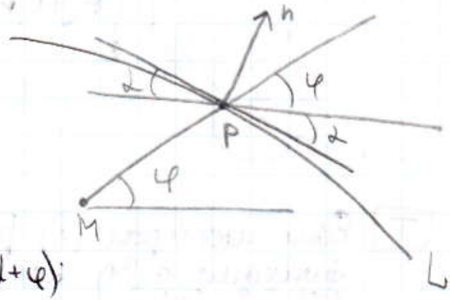
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\rho_{MP}\right) = \frac{(\eta - y)}{\rho^2_{MP}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} \ln \rho_{MP} = \frac{\overrightarrow{MP}}{\rho_{MP}^2}$$

$$\ominus \int\limits_L f(P) \frac{\cos(\angle \overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} dl_P$$

Потенциал двойного слоя с единичной плотностью

Возьмем $f(P) = 1$.



Нам надо вычислить

$$\int\limits_L \frac{\cos \angle \overrightarrow{MP}, \vec{n}}{\rho_{MP}} dl_P .$$

$$\cos(\angle \overrightarrow{MP}\,\vec{n}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \varphi\right) = \sin(\alpha+\varphi)$$

$$\cos(\angle \overrightarrow{MP}, \vec{n})\, dl_P = \sin(\alpha+\varphi)\, dl_P = \sin\alpha\cos\varphi\, dl_P + \sin\varphi\cos\alpha\, dl_P =$$

$$\{ d\xi = -\cos\alpha\, dl_P ,\ dy = \sin\alpha\, dl_P \} \quad = \cos\varphi\, dy - \sin\varphi\, d\xi \ominus$$

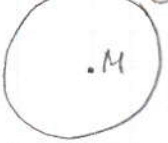
$r = r(\varphi)!$

$$\xi = r(\varphi)\cos\varphi$$
$$y = r(\varphi)\sin\varphi$$
$$d\xi = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi)\, d\varphi$$
$$dy = (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)\, d\varphi$$

$$\ominus \{\cos\varphi\,[r'\sin\varphi + r\cos\varphi] - \sin\varphi\,[r'\cos\varphi - r\sin\varphi]\}\, d\varphi = r(\varphi)\, d\varphi$$

$$\int\limits_L \frac{\cos(\angle \overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} dl_P = \int\limits_L \frac{r(\varphi)\, d\varphi}{r(\varphi)} = \int\limits_L d\varphi = 2\pi$$

$$\int\limits_L \frac{\cos(\angle \overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} dl_P = \begin{cases} 2\pi, & M \in D \\ \pi, & M \in L \ (\text{т.к. пробегает } \pi) \\ 0, & M \notin \overline{D},\ M \in E^2 \setminus \overline{D} \end{cases}$$



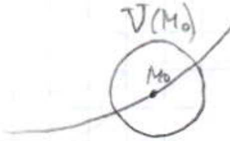
$\mathcal{C}$-контур

$$g(M)=\int\limits_{\ell} F(M,P)\,d\ell_P \quad (1)$$

$M(x,y)$, $P(\xi,\eta)$

Опр. – интеграл (1) наз-ся равномерно сходящимся в т. $M_0\in C$, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ окр. $V(M_0)$ и дуга $\ell\subset C$ т.ч. $M_0\in\ell$, что

$$\left|\int\limits_{\ell} F(M,P)\,d\ell_P\right|<\varepsilon \quad \forall M\in V(M_0).$$



$\boxed{T}$ Если интеграл (1) равн-но сх-ся в $M_0\in C$, то функция $g(M)$ непр. в M_0.
(без док-ва)

$$u(M)=\int\limits_{L} f(P)\,\frac{\cos(\angle\overrightarrow{MP},\vec{u})}{\rho_{MP}}\,d\ell_P$$

$$\frac{\cos(\angle\overrightarrow{MP},\vec{u})}{\rho_{MP}}\,d\ell_P=d\varphi$$

$$u_0(M)=\int\limits_{L} f(M_0)\,\frac{\cos\angle\overrightarrow{MP},\vec{u}}{\rho_{MP}}\,d\ell_P \;;\quad \boxed{v(M)=u(M)-u_0(M)}\text{ – разность потенциалов.}$$

$\boxed{T}$ Если функция $f(M)$ непр. в т. M_0 то $v(M)$ непр.

Док-во: $v(M)=\int\limits_{L}[f(P)-f(M_0)]\,\frac{\cos(\angle\overrightarrow{MP},\vec{u})}{\rho_{MP}}\,d\ell_P$

$f(M)$ непр. в т. $M_0 \Rightarrow \exists V(M_0)$ т.ч. $|f(M)-f(M_0)|<\varepsilon$ $\quad M\in V(M_0)$

$$\left|\int\limits_{\ell}[f(P)-f(M_0)]\,\frac{\cos(\angle\overrightarrow{MP},\vec{u})}{\rho_{MP}}\,d\ell_P\right|=\left|\int\limits_{\Delta\varphi}[f(r(\varphi))-f(r(\varphi_0))]\,d\varphi\right|<2\pi\varepsilon.$$

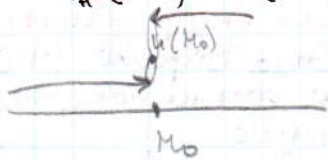
#

Рассм. $u_{вн}(M_0) = \lim\limits_{M\to M_0,\, M\in D} u(M)$ $u_{внеш}(M_0) = \lim\limits_{M\to M_0,\, M\notin \overline{D}} u(M) \triangleq u_н$

$\boxed{T}$ Если $f(M)$ непр. в M_0, то сущ-тот пределы $u_{вн}(M_0)$ $u_н(M_0)$, причем

$$u_{вн}(M_0) = u(M_0) + \pi f(M_0)$$
$$u_н(M_0) = u(M_0) - \pi f(M_0)$$

<u>Док-во</u>:



1) $u_{вн}(M_0) = \lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in D}} u(M) =$

$$= \lim_{M\to M_0,\, M\in D} \left[v(M) + u_0(M_0) \right] \overset{\text{т.к. } v \text{ непр.}}{=} v(M_0) + 2\pi f(M_0) \ominus$$

• $u_0(M) = \begin{cases} 2\pi f(M_0) & M_0 \in D \\ \pi f(M_0) & M_0 \in L \\ 0 & M_0 \in E^2 \setminus \overline{D} \end{cases}$ – потенциал слоя с единич. плотностью.

$\ominus\ u(M_0) - u_0(M_0) + 2\pi f(M_0) = u(M_0) - \pi f(M_0) + 2\pi f(M_0)$

2) $u_н(M_0) = \lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in E^2\setminus\overline{D}}} u(M) = \lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in E^2\setminus\overline{D}}} \left[v(M) + u_0(M_0) \right] = v(M_0) + 0 =$

$= u(M_0) - u_0(M_0) = u(M_0) - \pi f(M_0)$

Внутренняя задача Дирихле

1) $u \in C(\overline{D})$
2) u гарм. в D (т.е. $u \in C^2(D)$ и $\Delta u = 0$ в D)
3) $u(x,y) = \Psi(x,y)$ $(x,y) \in L$

Ищем реш-е задачи Дирихле в виде

$$u(M) = \begin{cases} \displaystyle\int_L f(P) \frac{\cos(\angle \overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}}\, dl_P, & M \in D \\ \displaystyle \pi f(M) + \int_L f(P) \frac{\cos(\angle \overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}}\, dl_P & M \in L \end{cases}$$

(4) $\pi f(M) + \int\limits_L f(P) \frac{\cos(\angle \overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} dl_P = \Psi(M)$, $M \in L$

$\boxed{T}$ Фредгольма
Инт. ур-е Фредгольма II рода (4) имеет ед. непрер. решение при $\forall$ непр. $\Psi(M)$ <=> однородное ур-е (4) ($\Psi=0$) имеет только нулевое решение.

$\boxed{T}$ существование решения внутр. задачи Дирихле
Для $\forall$ непр. $\psi(M)$ задача Дирихле (1)-(3) имеет реш-е
Док-во: из т. Фредгольма дост-но док, что ур-е (4) с $\Psi=0$ имеет только 0-е решение.
от противного: пусть $\exists$ нетрив. непр. $f(M)$ решение. Тогда $\exists M_0$ т.ч.

$$f(M_0) = \max_{M \in L} |f(M)| > 0$$

$$\pi f(M_0) + \int\limits_L f(P) \frac{\cos(\angle \overrightarrow{MP}; \vec{n})}{\rho_{MP}} dl_P = 0$$

$$\pi f(M_0) = \int\limits_L f(M_0) \frac{\cos(\angle \overrightarrow{M_0P}, \vec{n})}{\rho_{M_0P}} dl_P$$

$$\int\limits_L \underbrace{[f(M_0) + f(P)]}_{\geq 0} \underbrace{\frac{\cos(\angle \overrightarrow{M_0P}, \vec{n})}{\rho_{M_0P}}}_{>0} dl_P = 0 \qquad \overbrace{\frac{\cos \angle \overrightarrow{M_0P}, \vec{n}}{\rho_{MP}}}^{>0} = \frac{d\varphi}{dl_P}$$

$\Rightarrow f(M_0) + f(P) = 0$.

#

Постановки задач для уравнение колебаний.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \begin{matrix} 0<x<l \\ t>0, t\leq T \end{matrix}$$
(без потерь) $u(x,t)$ – смещение точки x в момент времени t.

Начальные условия:

$u(x,0) = \varphi(x)$
$u_t(x,0) = \psi(x)$ $\quad 0 \leq x < l$

Краевые (граничные) условия:

1 краевое усл.
$u(l,t)=\mu(t),\ 0\le t\le T$

2 краевое усл.
$u_x(l,t)=\nu(t),\ 0\le t\le T$

3 краевое усл.
$u(l,t)+\lambda u_x(l,t)=\theta(t)$

- Первая кр. задача:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & 0<x<l,\ 0<t\le T \\ u(0,t)=\mu_1(t) & \\ u(l,t)=\mu_2(t) & 0\le t\le T \\ u(x,0)=\varphi(x) & \\ u_t(x,0)=\psi(x) & 0\le x\le l \end{cases}$$

На полупрямой:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & 0<x<+\infty,\ 0<t\le T \\ u(0,t)=\mu(t) & (\text{во второй кр. задаче} - u_x(0,t)=\nu(t),\ 0\le t\le T) \\ u(x,0)=\varphi(x) & \\ u_t(x,0)=\psi(x) & x\ge 0 \end{cases}$$

- Задача Коши

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & -\infty<x<+\infty,\ 0<t\le T \\ u(x,0)=\varphi(x) & \\ u_t(x,0)=\psi(x) & \end{cases}$$

Задача Коши для ур-я колебаний. Формула Даламбера.

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (1) \\ u(x,0)=\varphi(x) & (2) \\ u_t(x,0)=\psi(x) & (3) \end{cases} \quad -\infty<x<\infty$$

Ф-ла Даламбера:

$\xi = x + at$, $y = x - at$

$x = \frac{\xi + y}{2}$, $t = \frac{\xi - y}{2a}$ — такая замена

$$v(\xi, y) = u(x(\xi, y), t(\xi, y)) = u\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2a}\right)$$

$$v_\xi(\xi, y) = u_x\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2a}\right)\cdot\frac{1}{2} + u_t\left(\frac{\xi+y}{2}, \frac{\xi-y}{2a}\right)\cdot\frac{1}{2a}$$

$$v_{\xi y}(\xi, y) = u_{xx}(\ldots, \ldots)\frac{1}{4} + u_{xt}(\ldots, \ldots)\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2a}\right) +$$

$$+ u_{tx}(\ldots, \ldots)\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{2} + u_{tt}(\ldots, \ldots)\left(\frac{1}{2a}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2a}\right) = 0$$

$u_{xt} = u_{tx}$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} = \tilde{f}(\xi), \quad v(\xi, y) = \int \tilde{f}(\xi)\, d\xi + \hat{f}(y)$$

$v(\xi, y) = f_1(\xi) + f_2(y)$ — решение имеет такой вид

$$u(x,t) = v(x+at, x-at) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

$$u_t(x,t) = af_1'(x+at) - af_2'(x-at)$$

$$u_t(x,0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x)$$

Получим систему: $\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi + c \end{cases}$

$$f_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{c}{2}$$

$$f_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi - \frac{c}{2}$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{c}{2} + \frac{\varphi(x-at)}{2} - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at} \psi(\xi)\, d\xi - \frac{c}{2} =$$

$=$

$$\boxed{u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi}$$

формула Даламбера

$\boxed{T}$ о сущ-ии и единственность
Пусть $\varphi\in C^2(-\infty,\infty)$, $\psi\in C^1(-\infty,\infty)$. Тогда $\exists!$ функция $u(x,t)$ т.ч. $u(x,t)\in C^2(R\times \bar{R}^+)$ удовл. (1)-(3).
Док-во: $u_{tt}(x,t)=\frac{\varphi''(x+at)a^2+\varphi''(x-at)a^2}{2}+\frac{1}{2a}\left[\psi'(x+at)a^2-\right.$

$$\left.-\psi'(x-at)a^2\right]$$

$$u_{xx}(x,t)=\frac{\varphi''-\varphi''}{2}+\frac{1}{2a}\left[\psi'(\cdot)-\psi'(\cdot\cdot)\right]$$

Дальше просто проверяем.

#

$\boxed{T}$ Пусть $u_i(x,t)$ $i=1,2$ т.ч. $u_i\in C^2(R\times[0,T])$ и удовл.

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2},\quad \begin{matrix}-\infty<x<\infty\\ 0\le t\le T\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}u_i(x,0)=\varphi_i(x)\\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x,0)=\psi_i(x)\end{matrix}\right. \quad -\infty<x<\infty$$

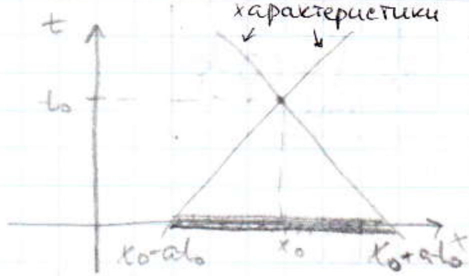
Тогда $\sup\limits_{\substack{x\in R\\ t\in[0,T]}}|u_1(x,t)-u_2(x,t)|\le\sup\limits_{x\in R}|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|+$

$$+T\sup_{x\in R}|\psi_1(x)-\psi_2(x)|.$$

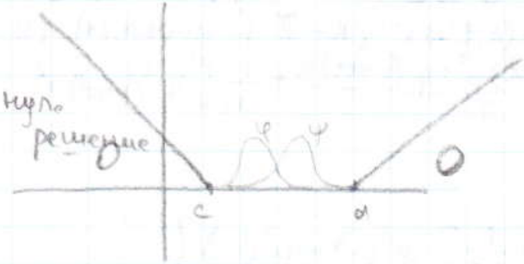
Док-во: $|u_1-u_2|\le\frac{|\varphi_1(x+at)-\varphi_2(x-at)|}{2}+\frac{|\varphi_2(x+at)-\varphi_2(x-at)|}{2}+$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}|\psi_1(\xi)-\psi_2(\xi)|\,d\xi$$

$$\sup_{\substack{x\in R\\ t\in[0,T]}}|u_1-u_2|\le\sup|\varphi_1-\varphi_2|+\sup|\psi_1-\psi_2|$$



$$x+at=x_0+at_0$$
$$x-at=x_0-at_0$$



Метод продолжения для решения задач на полупрямой.

- Первая КЗ на полупрямой:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & x>0,\ t>0 \\ u(0,t)=0, & t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x) & x>0 \quad \varphi(0)=0 \\ u_t(x,0)=\psi(x) & \psi(0)=0 \end{cases}$$

Расм. вспомогат. задачу Коши:

$$\begin{cases} U_{tt}=a^2U_{xx} & -\infty<x<\infty,\ t>0 \\ U(x,0)=\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq 0\\ -\varphi(-x), & x\leq 0\end{cases} \\ U_t(x,0)=\Psi(x) \end{cases} \qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\geq 0\\ -\psi(-x), & x\leq 0\end{cases}$$

$$U(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi$$

$$u(x,t)=U(x,t) \quad x\geq 0,\ t\geq 0$$

$$u(0,t)=\underbrace{\frac{\Phi(at)+\Phi(-at)}{2}}_{=0}+\frac{1}{2a}\underbrace{\int\limits_{-at}^{at}\Psi(\xi)d\xi}_{=0} \text{ - выполняется}$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, & x-at\geq 0\\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\dfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{0}-\psi(-\xi)d\xi\end{cases}$$

- Вторая кр. з. на полупрямой

$(c\ u_x(0,t)=0)$

Тогда берем $\begin{cases}U_{tt}(x,t)=a^2U_{xx}\\ U(x,0)=\Phi(x)\\ U_t(x,0)=\Psi(x)\end{cases}$ $\quad \Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq 0\\ \varphi(-x), & x\leq 0\end{cases}$ $\quad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\geq 0\\ \psi(-x), & x\leq 0\end{cases}$

$$u(x,t)=U(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi,\quad \begin{matrix}x\geq 0\\ t\geq 0\end{matrix}$$

Всё вып., осталось проверить краевое условие:

$$u_x(0,t)=U_x(0,t)=\underbrace{\frac{\Phi'(at)+\Phi'(-at)}{2}}_{\text{произв. от четн. ф-ции - нечетная} \Rightarrow =0}+\frac{1}{2a}\underbrace{[\Psi(at)-\Psi(-at)]}_{=0}=0$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, & x-at\geq 0\\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\dfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{0}\psi(\xi)d\xi\end{cases}$$

Существование решение 1ого кр. задачи

$$\begin{cases}(1)\ u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l,\ 0<t\leq T\\ (2)\ u(0,t)=0\\ (3)\ u(l,t)=0\\ (4)\ u(x,0)=\varphi(x)\\ (5)\ u_t(x,0)=\psi(x)\end{cases}$$

$v(x,t) = X(x)\cdot T(t)$

$X(x)T''(t) = a^2 T(t) X''(x)$

$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \longrightarrow \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0\le x\le l \\ X(0)=0 \\ X(l)=0 \end{cases}$

$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \tilde{c}_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$

$\longrightarrow T_n'' + \lambda_n a^2 T_n = 0$

$T_n(t) = \tilde{C}_{1n}\sin\frac{\pi n}{l}at + \tilde{C}_{2n}\cos\frac{\pi n}{l}at$

Получили $\begin{cases} u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[c_n \sin\frac{\pi n}{l}at + d_n\cos\frac{\pi n}{l}at\right]\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x & (6) \\ u(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\cdot\frac{\pi n}{l}a\sin\frac{\pi n}{l}x = \psi(x) \end{cases}$

$\to d_m = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(s)\sin\frac{\pi m}{l}s\,ds$

$c_m\cdot\frac{\pi m}{l}a = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(s)\sin\frac{\pi m}{l}s\,ds$

$\to$ $c_n = \frac{2}{\pi n a}\int\limits_0^l \psi(s)\sin\frac{\pi n}{l}s\,ds$

$d_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(s)\sin\frac{\pi n}{l}s\,ds$

$\Rightarrow$ наше $u(x,t)$ с c_n и d_n – решение нашей задачи.

$\boxed{\text{T}}$ Пусть $\varphi\in C^3[0,l]$, $\psi\in C^2[0,l]$, $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, $\psi(0)=\psi(l)=0$, $\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$.

Тогда $u(x,t)$, опред. формулой (6), т.ч. $u\in C^2\{[0,l]\times[0,T]\}$ и удовл. (1)-(5), – решение, ряд сходится.

Док-во: $d_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(s)\sin\frac{\pi n}{l}s\,ds \overset{\text{по частям}}{=} \frac{2}{l}\varphi(s)\left(-\frac{l}{\pi n}\right)\cos\frac{\pi n}{l}s\Big|_0^l +$

$$+\frac{2}{\pi n}\int\limits_0^l \varphi'(s)\cos\frac{\pi n}{l}s\,ds = \frac{2}{\pi n}\varphi'(s)\frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{l}s\Big|_0^l -$$

$$-\frac{2l}{(\pi n)^2}\int\limits_0^l \varphi''(s)\sin\frac{\pi n}{l}ds = \frac{2l}{(\pi n)^2}\varphi''(s)\left(\frac{l}{\pi n}\right)\cos\frac{\pi n}{l}s\Big|_0^l -$$

$$-\frac{2l^2}{(\pi n)^3}\int\limits_0^l \varphi'''(s)\cos\frac{\pi n}{l}s\,ds = -\frac{2l^2}{(\pi n)^3}\int\limits_0^l \varphi'''(s)\cos\frac{\pi n}{l}s\,ds$$

Аналогично

$$c_n = \frac{2}{\pi n a}\psi(s)\left(-\frac{l}{\pi n}\right)\cos\frac{\pi n}{l}s\Big|_0^l + \frac{2l}{\pi n a}\int\limits_0^l \psi'(s)\cos\frac{\pi n}{l}s\,ds$$

$$= \frac{2l}{(\pi n)^2 a}\psi'(s)\left(\frac{l}{\pi n}\right)\sin\frac{\pi n}{l}s\Big|_0^l - \frac{2l^2}{(\pi n)^3 a}\int\limits_0^l \psi''(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds =$$

$$= -\frac{2l^2}{(\pi n)^3 a^2}\int\limits_0^l \psi''(s)\sin\frac{\pi n}{l}s\,ds$$

$\sin\frac{\pi n}{l}s$ и $\cos\frac{\pi n}{l}s$ – ортогональные системы.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2|d_n|$ сх-ся, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2|c_n|$ сх-ся

- $|d_n|n^2 = \frac{|A|}{n}|\varphi_n'''| \le$, $A = -\frac{2l^2}{\pi^3}$

$\le |A|\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n^2}+(\varphi_n''')^2\right)$ — $\frac{1}{n^2}$ и $(\varphi_n''')^2$ сх-ся $\Rightarrow$

$\left(ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)\right)$ $|d_n|n^2$ сх-ся

- $|c_n|n^2 \le \frac{B}{n}|\tilde{\psi}_n''| \le \frac{B}{2}\left(\underset{\uparrow\text{сх-ся}}{\frac{1}{n^2}} + \underset{\uparrow}{(\tilde{\psi}_n'')^2}\right) \Rightarrow |c_n|n^2$ сх-ся

$\sum$ сх.

$u(x,t) = \sum\limits_1^{\infty} v_n(x,t)$, $|v_n(x,t)| \le |c_n| + |d_n|$ $\forall x\in[0,l]$ $\forall t\in[0,T]$

$\Rightarrow$ $u(x,t)$ существует и непр.
$u\in C^2$ ($|c_n|n^2$ и $|d_n|n^2$ – сх-ся ряда)

#

Интеграл энергии. Теорема единственности решения 1ой кр. задачи.
2ой кр. задачи

$\boxed{T}$ Пусть $u_i(x,t)$ $i=1,2$ т.ч. $u_i \in C^2\{[0,l]\times[0,T]\}$,

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad \begin{matrix} 0<x<l \\ 0<t<T \end{matrix}$$

$$u_i(0,t) = \mu_1(t)$$
$$u_i(l,t) = \mu_2(t)$$
$$u_i(x,0) = \varphi(x)$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$$

Тогда $u_1(x,t) = u_2(x,t)$.

Док-во: $v = u_1 - u_2$

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} \\ v(0,t) = 0 \\ v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = 0 \\ v_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

– докажем, что $v=0$.

Рассм. $I(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[(v_t(x,t))^2 + a^2 (v_x(x,t))^2 \right] dx$ – интеграл энергии

$$I'(t) = \int\limits_0^l \left[v_t(x,t) \cdot v_{tt}(x,t) + a^2 v_x(x,t) v_{xt}(x,t) \right] dx =$$
$$= \int\limits_0^l \left[v_t v_{tt} - a^2 v_{xx} v_t \right] dx + a^2 v_x v_t \Big|_0^l =$$
$$= a^2 v_x(l,t) \underbrace{v_t(l,t)}_{=0} - a^2 v_x(0,t) \underbrace{v_t(0,t)}_{=0} = 0 \quad (1')$$

Подставим нач. условие:

$$I(t) = I(0) = \text{const}$$
$$I(0) = 0$$
$$v_t(x,t) = v_x(x,t) = 0 \quad \begin{matrix} \forall x \in [0,l] \\ t \in [0,T] \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} v(x,t) = \text{const} \\ v(x,t) = 0 \end{matrix}$$

#

Для II ой кр. задачи аналогично: $v_x(l,t) = 0$, $v_x(0,t) = 0$ в $(1')$

Задача с данными на характеристиках

Характеристики:

$$a_{11}(x,y)\cdot u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F(x,y,u(x,y),u_x,u_y)=0$$

ОДУ: $a_{11}(x,y)(dy)^2-2a_{12}(x,y)\,dx\,dy+a_{22}(x,y)(dx)^2=0$

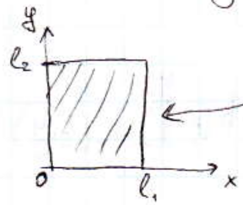
Решение этого ОДУ (инт. кривые) наз-ся характеристиками

$$u_{tt}=a^2u_{xx}$$
$$a^2u_{xx}-u_{tt}=0$$
$$a^2(dt)^2-(dx)^2=0$$

$$\begin{matrix} a\,dt-dx=0 & d(at-x)=0 \\ a\,dt+dx=0 & d(at+x)=0 \end{matrix}$$

$\boxed{\begin{matrix} x+at=const \\ x-at=const \end{matrix}}$ — хар-ки для нашего уравнения колебаний

Рассмотрим задачу:



$$Q=\ \begin{cases} (1)\ u_{xy}(x,y)=a(x,y)u_x(x,y)+b(x,y)u_y(x,y)+F(x,y,u) \\ \quad (x,y)\in Q,\ F(x,y,p)\ \text{задана} \\ (2)\ u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le l_1 \\ (3)\ u(0,y)=\psi(x),\ 0\le y\le l_2 \end{cases}$$

Наше уравнение — гиперболического типа.

$$dx\,dy=0 \qquad \left.\begin{matrix} dx=0 & x=const \\ dy=0 & y=const \end{matrix}\right\}\ \text{характеристики}$$

Эквивалентные системы интегральных уравнений.

$$\begin{cases} (1)\ u_{xy}=a(x,y)u_x+b(x,y)u_y-f(x,y,u(x,y)) \\ (2)\ u(x,0)=\varphi(x) \quad 0\le x\le l_1 \\ \quad\ u(0,y)=\psi(y),\ 0\le y\le l_2 \end{cases}$$

Условие I: $a, b \in C[Q]$, $f(x,y,p) \in C\{Q \times R\}$
$|f(x,y,p_1) - f(x,y,p_2)| \le L|p_1 - p_2| \quad \forall x, y \in Q$
$p_1, p_2 \in R$
$\varphi \in C^1[0, l_1]$, $\psi \in C^1[0, l_2]$
$\varphi(0) = \psi(0)$.

Пусть $u(x,y)$ – решение (1), (2). Тогда

$$u_x(x,y) = \underbrace{u_x(x,0)}_{\Phi_x(x,y)} + \int_0^y [a(x,\eta) u_x(x,\eta) + b(x,\eta) u_y(x,\eta) + f(x,\eta,u(x,\eta))] d\eta$$

$$u(x,y) = \Phi(x,y) + \int_0^x \int_0^y [a(\xi,\eta) u_x(\xi,y) + b(\xi,\eta) u_y(\xi,\eta) + f(\xi,y,u(\xi,y))] dy d\xi$$

, где $\boxed{\Phi(x,y) = \psi(y) + \varphi(x) - \varphi(0)}$.

$$u_y(x,y) = \Phi_y(x,y) + \int_0^x [a(\xi,y) u_x(\xi,y) + b(\xi,y) u_y(\xi,y) + f(\xi,y,u(\xi,y))] d\xi$$

Введем новые функции: $\boxed{v = u_x \quad w = u_y}$

(3) $u(x,y) = \Phi(x,y) + \int_0^x \int_0^y [a(\xi,\eta) v(\xi,\eta) + b \cdot w + f(\xi,y,u)] dy d\xi$

(5) $w(x,y) = \Phi_y(x,y) + \int_0^x [a(\xi,y) v + b w + f(\xi,y,u)] d\xi$

(4) $v(x,y) = \Phi_x(x,y) + \int_0^y [a(x,\eta) v + b w + f] d\eta$

Если u – решение (1), (2), то v и w – решение (3)-(5).
А если обратно:
Пусть $u, v, w \in C[Q]$, удовл. в Q (3)-(5). Тогда u – решение (1), (2).
Почему: u – непр. диф. получается, и u_{xy} сущ-ет (достаточно продифф. (3) по x и y (2 раза)).
Начальные условия тоже выполняются.

$\boxed{T}$ Эквивалентности

Пусть выполнены условие I. Функция $u(x,y)$ явл-ся решением (1),(2) $\Leftrightarrow$ $u, v, w \in C[Q]$ и являются решением (3)-(5).

$\boxed{T}$ существование

Пусть выполнены условие I. Тогда сущ-ет $u(x,y)$, являющ. решением задачи (1),(2).

Док-во: с помощью итерац. процесса

Докажем, что $\exists\, u, v, w \in C[Q]$, удовл. (3)-(5).
(а дальше по т. эквив-ти).

В (3)-(5) припишем слева индексы $n+1$, а в правую часть $- n$ (для u, v, w) – получим равенства (6),(7),(8)

Стартовые ф.- $u_0(x,y) = v_0(x,y) = w_0(x,y) = 0$ в Q.
Все итерации сущ-ют (из непрер-ти того что нужно следует)

$u_n, v_n, w_n \in C[Q]$ $\forall n > 0$. Хотим док-ть, что эти послед-ти сходятся.

u_1, v_1, w_1 определены. Введем

$$\boxed{B_1 = \max_Q \{|u_1(x,y)| + |v_1(x,y)| + |w_1(x,y)|\}}.$$

$\forall (x,y) \in Q$ $|u_1(x,y) - u_0(x,y)| \le B_1$, $|v_1(x,y) - v_0| \le B_1$, $|w_1 - w_0| \le B_1$.

Введем $M = \max\{\max_Q |(a(x,y))|, \max_Q |(b(x,y))|, L\}$.

функции от ξ, η

- $$|u_2 - u_1| \le \int_0^x\int_0^y [|a(\xi,\eta)||v_1 - v_0| + |b||w_1 - w_0| + \overbrace{|f(\xi,\eta,u_1| - f(\xi,\eta,u_0|}^{\le L|u_1-u_0|}]\, d\eta\, d\xi.$$

(из условия Липшица)

$$|(u_2 - u_1)| \le M\int_0^x\int_0^y 3B_1\, d\eta\, d\xi = 3B_1 Mxy, \quad \boxed{xy < \frac{(x+y)^2}{2}}\ (x,y > 0)$$

$$\Rightarrow |u_2 - u_1| \le 3B_1 M\frac{(x+y)^2}{2}$$

- $$|v_2(x,y) - v_1(x,y)| \le \int_0^y [|a(x,y)||v_1 - v_0| + |b||w_1 - w_0| + L(u_1 - u_0|]\, d\eta\, d\xi \le$$
$$\le 3B_1 My < 3B_1 M(x+y)$$

- w точно так же получим $< 3B_1 M(x+y)$.

Обозначим $3B_1 \equiv B$.

$$|u_n - u_{n-1}| \le BM^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+y)^n}{n!}, \quad \boxed{K = 2 + \ell_1 + \ell_2}$$

$$|v_n - v_{n-1}| \le BM^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$|w_n - w_{n-1}| \le BM^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Пусть оценка верна при $n = m$.

$$|u_{m+1} - u_m| \le \int_0^x \int_0^y \left[M|v_m(\xi, y) - v_{m-1}| + M|w_m - w_{m-1}| + L|u_m - u_{m-1}|\right] d\eta\, d\xi \overset{②}{}$$ ← здесь уже можем писать предположение индукции.

$$\overset{②}{\le} M \int_0^x \int_0^y \left[2BM^{m-1} K^{m-2} \frac{(\xi+y)^{m-1}}{(m-1)!} + BM^{m-1} K^{m-2} \frac{(\xi+y)^m}{m!}\right] d\eta\, d\xi$$

$$\le BM^m K^{m-2} \int_0^x \int_0^y \left[2\frac{(\xi+y)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{(\xi+y)^m}{m!}\right] d\xi\, dy \le BM^m K^{m-2} \left[2 \cdot \frac{(x+y)^{m+1}}{(m+1)!} \text{ (отриц. подстановки выкинули) } + \frac{(x+y)^{m+2}}{(m+2)!}\right]$$

$$\Rightarrow |u_{m+1} - u_m| \le BM^m K^{m-2} \frac{(x+y)^{m+1}}{(m+1)!} \underbrace{\left[2 + \frac{(x+y)}{m+2}\right]}_{\le K \text{ (т.к. } \le 2+\ell_1-\ell_2)}$$

$$|v_{m+1} - v_m| \le \int_0^y \left[M|v_m - v_{m-1}| + M|w_m - w_{m-1}| + M|u_m - u_{m-1}|\right]$$

$$\le M \int_0^y \left[2BM^{m-1} K^{m-2} \frac{(x+y)^{m-1}}{(m-1)!} + BM^{m-1} K^{m-2} \frac{(x+y)^m}{m!}\right] dy \le$$

$$\le BM^m K^{m-2} \left[2\frac{(x+y)^m}{m!} + \frac{(x+y)^{m+1}}{(m+1)!}\right] \le \ldots$$

Для w - аналогично.

$$u_n(x,y) = \sum_{i=1}^n (u_i - u_{i-1})$$

$$v_n(x,y) = \sum_{i=1}^n (v_i - v_{i-1})$$

$$w_n(x,y) = \sum_{i=1}^n (w_i - w_{i-1})$$

 По признаку Вейерштрасса ряды равн-но сх-ся:

$|u_i - u_{i-1}| \le BM^{i-1} K^{i-2} \dfrac{(l_1+l_2)^i}{i!}$ — этот ряд сх-ся

$u_n(x,y) \rightrightarrows \bar{u}(x,y)$, $v_n \rightrightarrows \bar{v}$, $w_n \rightrightarrows \bar{w}$ $(n\to\infty)$

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in C[Q]$

Переходим к пределу в (3)-(5): заменяем все u, w и v на $\bar{u}$, $\bar{w}$ и $\bar{v}$.

$\boxed{T}$ **Единственности**

Пусть выполнено условие I. Тогда если u_1 и u_2 решение з. (1), (2), то $u_1 = u_2$ в Q.

<u>Док-во</u>: тогда u_1, v_1, w_1 реш-е (3)-(5)
u_2, v_2, w_2

$$U(x,y) = u_1 - u_2,\ V = v_1 - v_2,\ W = w_1 - w_2$$

$$U = |u_1 - u_2| \le \int_0^x\int_0^y [M|v_1 - v_2| + M|w_1 - w_2| + M|u_1 - u_2|]\,d\xi\,d\eta$$

$$U \le M\int_0^x\int_0^y [U + V + W]\,d\xi\,d\eta$$

$$V \le M\int_0^y [U + V + W]\,d\eta \qquad \text{при } (x,y)\in Q$$

$$W \le M\int_0^x [U + V + W]\,d\xi$$

Надо док-ть, что $U = V = W = 0$ в Q.

возьмем маленькие $x_0 < l_1$ и $y_0 < l_2$.

$$Q_{x_0y_0} = \{x\in[0,x_0],\ y\in[0,y_0]\}$$

$$\begin{cases} 3x_0y_0M < 1 \\ 3x_0M < 1 \\ 3y_0M < 1 \end{cases}$$ — вот такие берем x_0 и y_0.

Рассм. $U^* = \max\limits_{Q_{x_0y_0}} U$, $V^* = \max\limits_{Q_{x_0y_0}} V$, $W^* = \max\limits_{Q_{x_0y_0}} W$

Пусть $U^* \ge V^*$ и W^*.

$$U(x,y) \le M\int_0^x\int_0^y [U^* + U^* + U^*]\,d\xi\,d\eta \le M\cdot 3U^* x_0 y_0$$

$U^* < \underbrace{3 M x_0 y_0}_{<1} U^*$ => противоречие

Доказали для $Q_{x_0 y_0}$. Теперь идем по полоске

то есть $U = M\int_{x_0}^{x} \dots, V = \int_{y_0}^{y} \dots, W = M\int_{x_0}^{x} \dots$

и берем $\begin{cases} 3(x_1 - x_0) y_0 M < 1 \\ 3(x_1 - x_0) M < 1 \\ 3 y_0 M < 1 \end{cases}$ Проходим полоску - берем ~~новую~~ полоску выше. И т.д.

#

Сопряженный дифф. оператор

$u(x_1, x_n) = u(\bar{x}) \quad D \in \mathbb{R}^n, \quad u \in C^2(D)$

Опр. - $L(u) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x}) + c(\bar{x}) u(\bar{x})$

Сопр. дифф. оператор $v \in C^2(D)$

$$M[v] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij}(\bar{x}) v(\bar{x})) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i(\bar{x}) v(\bar{x})) + c(\bar{x}) \cdot v(\bar{x})$$

$a_{ij} \in C^2(D) \quad b_i \in C(D) \quad c \in C(D)$

$u, v \in C^2(D) \quad \boxed{v L[u] - u M[v] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_i}}$

где $p_i(x) = \sum_{j=1}^{n} [v a_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j}(\bar{x}) - u \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(\bar{x}) v(\bar{x}))] + b_i(\bar{x}) u(\bar{x}) v(\bar{x})$

Покажем это:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_i}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Big[\frac{\partial}{\partial x_i} (v(\bar{x}) a_{ij}(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial x_j}(\bar{x}) + v(\bar{x}) a_{ij}(\bar{x}) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} v)) - u \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij} v)) \Big] +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} b_i(\bar{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x})v(\bar{x})+\sum_{i=1}^{n} u(\bar{x})\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(\bar{x})v(\bar{x}))+$$

$$+c(\bar{x})u(\bar{x})v(x)-c(\bar{x})u(\bar{x})v(x).$$

Остальные члены сокращаются:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(va_{ij})\frac{\partial u}{\partial x_j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(va_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

⊕ здесь $a_{ij}=a_{ji}$

Пример 1. $L[u]=\operatorname{div} K(x,y,z)\operatorname{grad} u(x,y,z)=$

$$=Ku_{xx}+Ku_{yy}+Ku_{zz}+K_xu_x+K_yu_y+K_zu_z$$

$$M[v]=(Kv)_{xx}+(Kv)_{yy}+(Kv)_{zz}-$$

$$-(K_xv)_x-(K_yv)_y-(K_zv)_z$$

Докажем, что L - самосопряженный:

$L[u]=M[u]\ \forall u$

$$Ku_{xx}+K_xu_x\overset{?}{=}K_{xx}u+2K_xu_x+Ku_{xx}-K_{xx}u-K_xv_x$$

Пример 2. $L[u]=u_{xy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u$

$$M[v]=v_{xy}-(a(x,y)v)_x-(b(x,y)v)_y+c(x,y)v$$

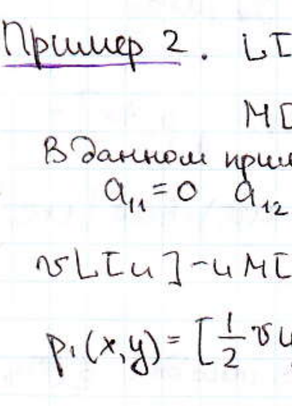
В данном примере

$a_{11}=0\quad a_{12}=\frac{1}{2}\quad a_{21}=1/2\quad a_{22}=0\quad b_1=a(x,y)\quad b_2=b(x,y)$

$$vL[u]-uM[v]=\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{\partial p_2}{\partial y}$$

$$p_1(x,y)=\left[\frac{1}{2}vu_y-\frac{1}{2}uv_y\right]+auv,\quad p_2(x,y)=\left[\frac{1}{2}vu_x-\frac{1}{2}uv_x\right]+bvu$$

Метод Римана



Ω^+ - выше кривой

$l(x), f(x)$

$f(x)\in C^1(R)$

$f'(x)<0$

(1) $L[u] = \underbrace{u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = F(x,y)}$, в Q^+

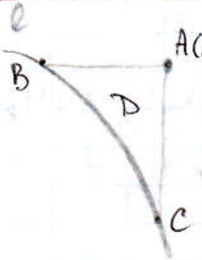
(2) $u|_l = \varphi(x)$, $\partial u/\partial x|_l = \psi(x)$ — нормальная произв-я

$a, b \in C^1[Q^+]$, $c \in C[Q^+]$, $F \in C[Q^+]$

$\varphi'(x), \psi(x) \in C(R)$

Пусть есть ф-ия u, удовл. (1) и (2).

• Напишем вспом. задачу:



$$M[v] = \overbrace{v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv = 0}$$
$x \le x_0,\ y \le y_0$

$$v(x,y_0) = \exp\left\{\int^{x} b(s,y_0)\,ds\right\}$$
$$v(x_0,y) = \exp\left\{{}^{x_0}\int_{y_0}^{y} a(x_0,s)\,ds\right\}$$

Используем понятие сопр. оператора:

$$\iint_D [vL[u] - uM[v]]\,dxdy = \iint_D \left[\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y}\right] dxdy =$$

$$= \{\text{по ф-ле Грина}\} = \int_{\partial D} [p_1 dy - p_2 dx] = \int_l [p_1 dy - p_2 dx] +$$

$$+ \int_C^A \left(\frac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right) dy \mp \int_{AB} \left[\frac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right] dx \circleddash$$

Разберемся с интегралами:

$\frac{1}{2}(vu_y - uv_y) = \frac{1}{2}(vu)_y - uv_y)$, аналогично для $\frac{1}{2}(vu_x - uv_x)$

$$\circleddash \int_l [p_1 dy - p_2 dx] + \frac{1}{2}u(A)v(A) - \frac{1}{2}u(C)v(C) + \int_C^A u(\overbrace{-v_y + av}^{=0})\,dy +$$

$$+ \frac{1}{2}u(A)v(A) - \frac{1}{2}u(B)v(B) + \int_B u[\underbrace{-v_x + bv}_{0}]\,dy$$

$$\iint\limits_D [v L[u] - u M[v]]\, dx\,dy = u(A) - \frac{1}{2} u(C) v(C) - \frac{1}{2} u(B) v(B) + \int\limits_{\ell} [p_1 dy - p_2 dx]$$

$= F$

знаем

знаем

$$\iint\limits_D v(x,y) F(x,y)\, dx\,dy = \text{—''—}$$

знаем

наверное лучше в учебнике глянуть

Если знаем u, то и $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x} 1 + \frac{\partial u}{\partial y} f'(x) \Big|_{\ell} = \frac{d\, u(x, f(x))}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}$$

$\tau = \{1, f'(x)\}$ (если знаем произв. по касательной)

$$u(x_0, y_0) = \iint\limits_D v(x,y) F(x,y)\, dx\,dy + \frac{1}{2} u(C) v(C) + \frac{1}{2} u(B) v(B) - \int\limits_{\ell} [p_1 dy - p_2 dx].$$

знаем

$v(x, y, x_0, y_0)$ – зависит тоже от x_0 и y_0.

По вопросам к экз.

(20) что такое потенц. и посчитать его с ед. плотн-стью

что-то про Дирихле

(..) т. о скачке, определить решение

(.) $\exists$ и реш. з. Дирихле ..